Konjugierte kinetische Brennpunkte

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Hermann Kober.

Mittwoch, den 23. November 1910, Mittags 12 Uhr

im Musiksaal der Universität:

Vortrag:

„Die Entwicklung der analytischen Zahlentheorie“

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1910.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Geh.-Rat Prof. Dr. **Kneser**.

Rigorosum bestanden am 6. 7. 10.

Meinen Eltern

in Liebe und Dankbarkeit.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543115_0075

Inhalt.

Seite

Erstes Kapitel.

Beispiele für konjugierte Punkte und Enveloppen.

§ 1. $U = r^{-2}$, $h < 0$ 4
§ 2. $U = -r^{-2}$, $h > 0$ 7
§ 3. $U = r^{-1}$, $h < 0$ 10
§ 4. $U = -r^{-1}$, $h > 0$ 11
§ 5. $U = r^2$ 13
§ 6. $U = -r^2$, $h > 0$ 18

Zweites Kapitel.

Die Gestalt der Bahnkurven in den Fällen $U = \pm r^n$.

§ 7. Allgemeines 20
§ 8. Hilfssätze 21
§ 9. $U = r^n$, $h > 0$ 23
§ 10. $U = r^n$, $h = 0$ 32
§ 11. $U = r^n$, $h < 0$ 34
§ 12. $U = -r^n$, $h > 0$ 35

Drittes Kapitel.

Die Untersuchung über konjugierte Punkte.

§ 13. Das Differenzieren eines Integrals nach einem Parameter 38
§ 14. $U = r^n$, $h \geqq 0$ 39
§ 15. $U = r^n$, $h < 0$ 40
§ 16. $U = -r^n$, $h > 0$ 46
§ 17. Die Bewegung in einer Kreisbahn 55

Viertes Kapitel.

Die Enveloppen.

§ 18. Allgemeines 59
§ 19. $U = +r^n$, $h < 0$ 61
§ 20. $U = -r^n$, $h > 0$, $n < 0$ 75

Einleitung.

Die Aufgabe der Variationsrechnung ist es, unbekannte Funktionen zu ermitteln, die gewisse von ihrem Verlauf abhängende Grössen zum Maximum oder Minimum machen die Variationsrechnung hat ferner zu prüfen, unter welchen Bedingungen ein Extremum wirklich vorhanden ist. Die einfachste Aufgabe dieser Disziplin ist folgende:

Es sei $F(xyx'y')$ eine bekannte Funktion der Variablen x,y,x',y', homogen vom 1. Grade inbezug auf x',y'. x,y sind unbekannte Funktionen eines Parameters $t, x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$. Diese unbekannten Funktionen x,y sollen so bestimmt werden, dass

$$I = \int F(xyx'y')dt$$

ein Extremum wird. In diesem allgemeinen Probleme sind die klassischen Fragen nach der Brachistochrone, nach der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte auf einer krummen Fläche, u. s. f. enthalten. Die notwendigen Bedingungen des Extremums werden angegeben durch die Differentialgleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

wobei

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$P.x' + Q.y' = 0$$ [1]).

Zur Ermittelung der hinreichenden Bedingungen des Extremums ist es erforderlich, zu beiden Seiten des betrachteten

[1]) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 1900, pg. 10,24.

Extremalenbogens ein „Feld“ abzugrenzen, d. i. ein Gebiet, das von den Extremalen einer gewissen Schar einfach überdeckt wird[1]). Wenn es sich um ein Extremumsproblem bei gegebenen festen Endpunkten handelt, ist diese Schar die Gesamtheit der Extremalen durch einen festen Punkt P. Es sei a der Parameter der Schar, dann ist die Gleichung derselben

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,t) \\ y &= y(a,t) \end{aligned}\right\}.$$

Der betrachtete Extremalenbogen, der von P ausgeht, sei bestimmt durch den Parameter a_0. Damit er sich mit einem Felde umgeben lässt, muss auf ihm überall — abgesehen von P —

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\Bigg|^{a = a_0}$$

von 0 verschieden sein[1]).

Es sei Q der zu P nächste Punkt des Bogens, in welchem Δ verschwindet. Dann hört das Feld in Q auf, P und Q heissen zu einander konjugiert. Der Bogen PQ liefert dann auch, abgesehen von einem ganz speziellen Falle, sicher kein eigentliches Maximum oder Minimum des Integrals I[2]). Diese bereits von Jacobi entdeckte Bedingung, dass ein Extremalenbogen keine konjugierten Punkte enthalten darf, hat einen anschaulichen geometrischen Sinn: in konjugierten Punkten schneiden sich benachbarte Extremalen. Lasse ich a sich ändern, so durchläuft der zu P konjugierte Punkt Q die „Enveloppe“ aller Extremalen, welche durch P gehen.

Wenn ein materieller Punkt sich unter dem Einfluss konservativer Kräfte bewegt, so wird mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Aktion das mechanische Problem der Ermittelung der Bahnkurve zurückgeführt auf die einfachste Aufgabe der Variationsrechnung. Es sei das Potential U eine gegebene Funktion der Koordinaten, v die Geschwindigkeit, m die Masse des bewegten Punktes, ds das Wegelement, h die Energiekonstante, dann ist die Bahnkurve diejenige Kurve, längs welcher genommen das Integral

[1]) Kneser, L. d. V., pg. 43,44.
[2]) K., L. d. V., pg. 96,97.

$$\int v ds = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \int \sqrt{U + h}\, ds$$

zum Minimum wird. Konjugierte Punkte heissen hier nach Thomson und Tait „konjugierte kinetische Brennpunkte“. Ihr Vorhandensein bedingt die Stabilität der Bewegung, wie noch des Näheren ausgeführt werden wird.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit soll es nun sein eine Reihe von Beispielen für konjugierte Punkte und Enveloppen durchzurechnen, wenn U eine Funktion des Abstandes r des beweglichen Punktes von einem festen Punkte O ist, $U = \pm r^n$.

Die Untersuchung zerfällt in vier Teile. Zunächst habe ich die konjugierten Punkte und Enveloppen untersucht in den besonders einfachen Fällen

$$n = -2, -1, +2,$$

in welchen sich die Gleichung der Bahnkurve durch trigonometrische und hyperbolische Funktionen darstellen lässt.

Der Fall $n = -1$ ist, soweit die Planetenbahnen auftreten, bereits in der Literatur behandelt. Besonders einfache und schöne Resultate ergeben sich auch im Falle $n = +2$.

Im zweiten Teile habe ich die Gestalt der auftretenden Bahnkurven untersucht für jeden ganzzahligen Wert von n. Dabei bin ich ausführlicher geworden, als es für die folgende Untersuchung unbedingt nötig war, jedoch schien der Gegenstand schon um seiner selbst willen das aufgewandte Interesse zu verdienen.

Im dritten Teile habe ich bei den Kurven die Frage entschieden, ob konjugierte Punkte vorhanden sind und wie sie zu einander liegen.

Im vierten und letzten Teile endlich habe ich die Gestalt der Enveloppen bestimmt. Jedoch sind hier noch Lücken vorhanden. Die Diskussion der Fälle

$$U = -r^n,$$

$$n \geqq 0 \text{ und } n \leqq -34$$

ist mir nicht gelungen.

Kapitel 1.

Einige Beispiele.

Als Beispiele sollen die Fälle betrachtet werden, in welchen die Integration der Differentialgleichung der Bahn durch cyklometrische und hyperbolische Funktionen ausführbar ist. Es sind dies die Fälle

$$U = r^{-2},\ r^{-1},\ r^0,\ r^2.$$

Der Fall r^0 ist trivial, er soll daher bei den folgenden Untersuchungen stets ausgeschlossen sein. r ist der Abstand des materiellen Punktes vom Kraftzentrum. Die Energiekonstante sei $= h$.

In den Fällen $U = + r^n$, $h \geq 0$ treten, wie später besprochen werden wird, konjugierte Punkte nicht auf. Auch unter den Beispielen sollen sie fortgelassen werden.

§ 1. $U = \frac{1}{r^2}$, $h < 0$.

Zur Bestimmung der Bahnkurven ergibt sich die Gleichung

$$\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = 0,$$

$$\frac{r^2 \sqrt{h + \frac{1}{r^2}}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} = a,$$

$$d\varphi = \pm \frac{a\, dr}{r \sqrt{r^2 h + 1 - a^2}}.$$

Die Integrationskonstante ist a. Ich setze $h = -k$, dann ist $k > 0$; die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$r \operatorname{Cof} m(\varphi - \varphi_0) = \frac{m}{\sqrt{k(m^2+1)}};$$

m ist dabei $= \left| \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right|$.

Eine weitere Integrationsconstante ist φ_0. Die Kurve ist symmetrisch zur Graden $\varphi = \varphi_0$ und schneidet sie rechtwinklig. Denn es ist

$$\mathfrak{Cof} m(\varphi - \varphi_0) = \mathfrak{Cof} m(\varphi_0 - \varphi),$$

$$\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right)_{\varphi=\varphi_0} = -\left(\frac{\mathfrak{Cot} m(\varphi-\varphi_0)}{m}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \infty,$$

$\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$ ist aber die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen Radiusvektor und Kurventangente.

Wenn $|\varphi - \varphi_0|$ von 0 bis ∞ wächst, so fällt r ständig von $\frac{m}{\sqrt{k(m^2+1)}}$ bis 0.

Die Kurve ist daher eine ganz im Endlichen liegende, zur Geraden $\varphi = \varphi_0$ symmetrische Doppelspirale, welche sich dem Attraktionszentrum O asymptotisch nähert. — Konjugierte Punkte sind solche, in denen sich zwei unendlich nahe Bahnkurven schneiden.

Die Gleichung einer Bahnkurve ist

$$1.)\quad r\mathfrak{Cof} m(\varphi-\varphi_0) = \frac{m}{\sqrt{k(m^2+1)}},$$

die Gleichung einer unendlich nahen

$$2.) r\mathfrak{Cof} m(\varphi-\varphi_0) - \frac{m}{\sqrt{k(m^2+1)}} - d\varphi_0 mr\mathfrak{Sin} m(\varphi-\varphi_0)$$

$$+ dm\left\{r(\varphi-\varphi_0)\mathfrak{Sin} m(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{\sqrt{k(m^2+1)(m^2+1)}}\right\} = 0.$$

Eliminiert man r unter Zuhilfenahme der Gleichung 1.), so folgt für die Schnittpunkte der Kurven die Gleichung

$$\frac{d\varphi_0}{dm} = \frac{1}{m^2(1+m^2)}[m(m^2+1)(\varphi-\varphi_0) - \mathfrak{Cot} m(\varphi-\varphi_0)].$$

Sind r_1, φ_1 die Koordinaten des einen Schnittpunktes, so gilt für den zweiten die Gleichung

$$\mathfrak{Cot} m(\varphi-\varphi_0) - m(m^2+1)(\varphi-\varphi_0) = \mathfrak{Cot} m(\varphi_1-\varphi_0) - m(m^2+1)(\varphi_1-\varphi_0)$$

$$= -m^2(1+m^2)\frac{d\varphi_0}{dm}.$$

Es muss nun untersucht werden, ob diese Gleichung eine von $\varphi = \varphi_1$ verschiedene Lösung hat. Die Differenz $\varphi - \varphi_0$ bewege sich von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Grösse

$$\mathfrak{Cot} m(\varphi - \varphi_0) - m(m^2+1)(\varphi - \varphi_0)$$

fällt in dem Intervalle $-\infty \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq 0$ von $+\infty$ bis $-\infty$, ebenso im Intervall $0 \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq \infty$, nimmt daher jeden Wert im Intervalle $-\infty \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq +\infty$ genau zweimal an. Daher besitzt die Gleichung

$$\mathfrak{Cot} m(\varphi - \varphi_0) - m(m^2+1)(\varphi - \varphi_0) = \mathfrak{Cot} m(\varphi_1 - \varphi_0) - m(m^2-1)(\varphi_1 - \varphi_0)$$

genau eine von $\varphi = \varphi_1$ verschiedene Lösung. Für $\varphi_1 = \varphi_0$ ist die zweite Wurzel $\varphi = -\infty$. Wenn $\varphi_1 - \varphi_0$ von 0 bis ∞ steigt, so steigt die zweite Wurzel der Gleichung, $\varphi - \varphi_0$, von $-\infty$ bis 0. Diese Verhältnisse lassen sich geometrisch leicht übersehen. Man zeichne das Bild der Kurve

$$y = \mathfrak{Cot} m(\varphi - \varphi_0) - m(m^2+1)(\varphi - \varphi_0),$$

wobei y, φ kartesische Koordinaten sind, und berücksichtige, dass man zusammengehörige Werte von φ durch die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Parallelen zur φ-Achse erhält.

Nun ist $\varphi = \varphi_0$ die Winkelkoordinate des von O entferntesten Punktes der Spirale, ihres Apozentrums [1]), $\varphi - \varphi_0 = \pm\infty$ die des asymptotischen Punktes $r = 0$. Das Zeichen $\pm$ gibt an, ob man auf der oberen oder unteren Hälfte der Spirale zu dem Punkte gelangt.

Zu jedem Punkte P der Spirale ist ein konjugierter Punkt Q vorhanden. Bewegt sich P auf der oberen Hälfte der Kurve, auf der $\varphi - \varphi_0 > 0$, vom Apozentrum bis zum Kraftzentrum O, dann wandert Q auf der unteren Hälfte, $\varphi - \varphi_0 < 0$, von O bis zum Apozentrum.

Nach der Definition von Thomson und Tait [2]) ist eine Bewegung stabil, wenn eine Bahnkurve von den durch einen ihrer Punkte gehenden benachbarten immer wieder geschnitten wird und von ihnen beliebig wenig entfernt bleibt. Zu einem Punkte muss in der Richtung seiner Bewegung auf der Bahnkurve stets ein konjugierter Punkt vorhanden sein; zwei benachbarte Bahnkurven müssen daher, wenn sie

[1]) Wittaker, Analytical Dynamics, pg. 84.

[2]) Thomson and Tait, Treatise on natural philosophy, art. 346

nicht geschlossen sind, sich in unendlich vielen Punkten schneiden. Denn schneiden sie sich in endlich vielen Punkten, so ist ja zu dem letzten Schnittpunkte in einer Richtung kein konjugierter Punkt vorhanden. Frank[1]) definiert eine Bewegung als oszillierend stabil, wenn zwei benachbarte Kurven sich immer wieder schneiden.

Nach keiner dieser beiden Definitionen ist die vorliegende Bewegung stabil. Denn wenn der Punkt auf der oberen Hälfte der Spirale $\varphi \geq \varphi_0$ sich vom Punkte $\varphi = \varphi_0$ bis zum Punkte O bewegt, so ist in seiner Bewegungsrichtung zu ihm kein konjugierter Punkt vorhanden, nur nach der entgegengesetzten Seite: wenn er also durch eine kleine konservative Störung abgelenkt wird, so wird die neue Bahn die alte nicht mehr schneiden. Wohl aber ist die Bewegung beschränkt stabil, weil zu einem Punkte, der sich von $\varphi = -\infty$ bis $\varphi = \varphi_0$ bewegt, in der Richtung des positiven Drehsinnes ein konjugierter vorhanden ist, ebenso für einen Punkt, der sich von $\varphi = +\infty$ bis $\varphi = \varphi_0$ bewegt, in der Richtung des negativen Drehsinnes.

§ 2. $U = -\frac{1}{r^2}$, $h > 0$.

Bezeichne ich mit φ_0, m Integrationskonstante, so ergeben sich die Bahnkurven

$$1.) \quad r = \frac{m}{\sqrt{h(m^2-1)}\cos m(\varphi-\varphi_0)}.$$

Dabei ist $h > 0$, $m > 1$.

Reelle Punkte der Kurve haben positiven Radiusvektor r, $\cos m(\varphi-\varphi_0)$ ist aber positiv nur für

$$(4n-1)\frac{\pi}{2} \leqq m(\varphi-\varphi_0) \leqq (4n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$(4n-1)\varkappa \leqq \varphi-\varphi_0 \leqq (4n+1)\varkappa,$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl,

$$\varkappa = \frac{\pi}{2m} < \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

[1]) Ph. Frank, Monatshefte für Mathematik u. Physik, 20. Jahrg., pg. 172.

Die Bahnkurven bestehen daher aus lauter von einander durch den Winkelraum $2\varkappa$ getrennten Zweigen, die im Reellen nicht zusammenhängen und untereinander kongruent sind; denn es ist

$$\cos m(\varphi - \varphi_0) = \cos m(\varphi - \varphi_0 + 4n\varkappa)$$

Als wirkliche Kurve, die der materielle Punkt beschreiben kann, kommt nur ein einzelner solcher Zweig in Betracht, den wir beliebig herausgreifen dürfen. Wir wählen den Teil

$$-\frac{\pi}{2} \leqq m(\varphi - \varphi_0) \leqq +\frac{\pi}{2},$$

$$-\varkappa \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq +\varkappa.$$

Es ist

$$\cos m(\varphi - \varphi_0) = \cos m(\varphi_0 - \varphi),$$

also ist der Zweig symmetrisch zur Graden $\varphi = \varphi_0$. Wenn $|\varphi - \varphi_0|$ von 0 bis $\varkappa$ wächst, so steigt

$$r = \frac{m}{\sqrt{h(m^2-1)\cos m(\varphi - \varphi_0)}}$$

von $\dfrac{m}{\sqrt{h(m^2-1)}}$ bis ∞.

Der Zweig ist gegen das Zentrum O konvex, da die wirkende Kraft

$$\frac{\partial U}{\partial r} = +\frac{2}{r^3}$$

eine abstossende Zentralkraft ist. Der Winkelraum, in welchem die Kurve verläuft, ist $2\varkappa < \pi$.

Die Untersuchung der Kurvengleichung zeigt ferner, dass die Kurve die Grade $\varphi = \varphi_0$ rechtwinklig schneidet und in dem Schnittpunkte dem Kraftzentrum am nächsten in ihrem ganzen Verlaufe kommt, dort also ein Perizentrum besitzt. Die Kurve hat daher annähernd die Gestalt eines Hyperbelzweiges, dessen reelle Achse die Grade $\varphi - \varphi_0$ ist und der dem Zentrum 0 seine konvexe Seite zuwendet.

Die Figur 1 stellt das Bild der Kurve dar; m ist $= 2$, $h = \frac{4}{75}$, der Massstab ist 1 cm.

Ich lege jetzt auf eine Bahnkurve den Punkt P mit den Koordinaten $r = c$, $\varphi = \varphi_1$, und erhalte zur Bestimmung des konjugierten Punktes die Gleichung

$$2.)\quad \cot m(\varphi - \varphi_0) - m(m^2-1)(\varphi-\varphi_0) = \cot m(\varphi_1-\varphi_0) - m(m^2-1)(\varphi_1-\varphi_0).$$

Dabei bewegt sich $\varphi - \varphi_0$ in dem Intervalle

$$-\varkappa \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq +\varkappa;\ \varkappa \text{ ist } = \frac{\pi}{2m}.$$

$\cot m(\varphi-\varphi_0) - m(m^2-1)(\varphi-\varphi_0)$ ist eine ständig fallende Funktion von $\varphi - \varphi_0$. Sie besitzt die Ableitung

$$-m[m^2 + \cot^2 m(\varphi-\varphi_0)].$$

Im Intervalle $-\varkappa \leqq \varphi-\varphi_0 \leqq 0$ fällt sie von $(m^2-1)\frac{\pi}{2}$ bis $-\infty$, im Intervalle $0 \leqq \varphi-\varphi_0 \leqq +\varkappa$ von $+\infty$ bis $-(m^2-1)\frac{\pi}{2}$.

Sie nimmt daher jeden Wert, der zwischen $-\frac{\pi}{2}(m^2-1)$ und $+\frac{\pi}{2}(m^2-1)$ liegt, genau zweimal an, jeden anderen nur einmal.

Ich bezeichne mit χ diejenige Wurzel der Gleichung

$$\cot m\chi - m(m^2-1)\chi = (m^2-1)\frac{\pi}{2},$$

welche zwischen 0 und $\varkappa$ liegt, dann ist $-\chi$ die Wurzel der Gleichung

$$\cot(-m\chi) - m(m^2-1)(-\chi) = -(m^2-1)\frac{\pi}{2},$$

welche zwischen $-\varkappa$ und 0 liegt.

Die Gleichung 2.) besitzt ausser $\varphi = \varphi_1$ noch genau eine zweite Lösung, wenn φ_1 einer der folgenden beiden Ungleichungen genügt

$$-\varkappa \leqq \varphi_1-\varphi_0 \leqq -\chi \qquad \text{oder}$$
$$\chi \leqq \varphi_1-\varphi_0 \leqq +\varkappa.$$

Geometrisch erkennt man das, in dem man die Kurve

$$y = \cot m(\varphi-\varphi_0) - m(m^2-1)(\varphi-\varphi_0)$$

mit einer Parallelen zur φ-Achse schneidet. Figur 2 stellt das Bild dieser Kurve dar im Intervalle

$$-\varkappa \leqq \varphi-\varphi_0 \leqq +\varkappa.$$

Gesetzt ist $m = 2$, $\varphi_0 = 0$. Durch die Punkte A und A', deren Abscissen $= -\varkappa$ bezw. $+\varkappa$ sind, sind Parallele zur φ-Achse gezogen, welche die Kurve zum zweitenmale in den Punkten B und B' schneiden, deren Abscissen $= \chi$ bezw. $-\chi$ sind. Eine Parallele zur φ-Achse schneidet die Kurve nur dann zweimal, wenn sie zwischen den ersten beiden Parallelen liegt. Der Massstab ist auf der φ-Achse 5cm, auf der y-Achse 1 cm; y, φ sind hierbei kartesische Koordinaten. Ich gehe nunmehr zur Bahnkurve zurück.

Wenn $\varphi - \varphi_0$ von $-\varkappa$ bis $-\chi$ steigt, so fällt y von

$$(m^2-1)\,\frac{\pi}{2} \text{ bis } -(m^2-1)\,\frac{\pi}{2},$$

die noch existierende zweite Wurzel der Gleichung steigt dann von χ bis $\varkappa$.

Den Werten $\varphi - \varphi_0 = \pm\varkappa$ entsprechen die beiden unendlich fernen Punkte des Kurvenzweiges, die ich mit dem Symbol ∞ bezeichnen will; den Werten $\varphi - \varphi_0 = \pm\chi$ entsprechen zwei bestimmte zur Achse $\varphi = \varphi_0$ symmetrische Kurvenpunkte R, R'. Auf der Kurvenstrecke RR' ist

$$-\chi \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq +\chi,$$

daher existiert zu keinem Punkte zwischen ihnen ein konjugierter Punkt, hingegen zu jedem anderen Punkte der Kurve ist ein konjugierter vorhanden. Aus dem Vorhergehenden folgt:

Bewegt sich Punkt P von ∞ bis R' auf dem unteren Teile, so bewegt sich der konjugierte Punkt Q von R bis ∞ auf der oberen Hälfte der Kurve. Die Bewegung ist auch hier nur beschränkt stabil, da zu einem Punkte, der sich von unten nach oben bewegt, ein konjugierter Punkt nur vorhanden ist, solange er sich auf dem Teile $\infty R'$ befindet. (Figur 3. Die Punkte R, R' liegen sehr nahe zusammen, da sich für χ der kleine Wert 0,094 ergibt.)

§ 3. $U = +\frac{1}{r}$, $h < 0$.

Die Bahnkurven sind Ellipsen, von deren Brennpunkten einer O und deren grosse Achse $= \frac{1}{h}$ ist. Es sind konjugierte

Punkte vorhanden, und zwar liegen solche Punkte auf einer Sehne durch den zweiten Brennpunkt [1]). Die Bewegung ist nach der Frankschen Definition oszillierend stabil. Die Enveloppe der durch einen Punkt P gehenden Extremalen ist eine Ellipse, deren Brennpunkte P und das Kraftzentrum O sind, deren grosse Achse $= 2/h - OP$ ist [2]).

$$\S\ 4.\ U = -\frac{1}{r},\ h > 0.$$

Die Gleichung einer Bahnkurve lautet, wenn ich mit a, φ_0 Integrationskonstante bezeichne,

$$r = \frac{2a^2}{\sqrt{4ha^2+1}\cos(\varphi-\varphi_0)-1}.$$

Dies ist die Gleichung des einen Zweiges einer Hyperbel, von deren Brennpunkten der eine im Kraftzentrum 0 liegt und deren reelle Achse $= 1/h$ ist, und zwar liegt hier die Gleichung desjenigen Zweiges vor, der dem Zentrum die konvexe Seite zuwendet.

O sei das feste Kraftzentrum, O' der zweite Brennpunkt einer Bahnkurve, P irgend ein Punkt auf ihr (Figur 4). Alle Bahnkurven haben den einen Brennpunkt O und die Länge $\frac{1}{h}$ der reellen Achse gemeinsam. Folglich ist

$$PO - PO' = \frac{1}{h}.$$

Lege ich durch P eine benachbarte Bahnkurve mit dem zweiten Brennpunkte O'_1 so ist ebenso

$$PO - PO'_1 = \frac{1}{h},\ \text{also}$$

$$PO = PO'_1,$$

P liegt auf der Mittelsenkrechten von $O'O'_1$.

Es sei Q ein weiterer Schnittpunkt der beiden Hyperbeln, dann folgt ebenso

---

[1]) Jacobis Werke, suppl. pag. 46.

[2]) Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, deutsche Ausgabe 1909, pag. 298.

$$QO - QO' = \frac{1}{h}$$

$$QO - QO'_1 = \frac{1}{h},$$

$QO' = QO'_1$, Q liegt ebenfalls auf der Mittelsenkrechten von $O'O'_1$. Die Grade PQ halbiert daher die Strecke $O'O'_1$, und lasse ich nun O', O'_1 zusammenrücken, so folgt:

PQ geht durch O', konjugierte Punkte liegen auf einer Sehne durch den zweiten Brennpunkt (§ 3). Ich ziehe nun durch O' zu den beiden Asymptoten die Parallelen $O'R, O'R'$ (Figur 5). Dann schneidet eine Sehne durch O' den Hyperbelzweig dann und nur dann zweimal, wenn sie nicht in den Winkelraum $RO'R'$ hineintritt. Wir erhalten daher unmittelbar anschaulich folgendes Resultat, genau wie in § 2: Zu keinem Punkte der Kurvenstrecke RR' gibt es einen konjugierten, zu jedem anderen Punkte des Zweiges genau einen. Bewegt sich der Punkt P auf dem oberen Teile der Kurve von ∞ bis R, so wandert der konjugierte Punkt Q auf dem unteren Teile von R' bis ∞.

Die Bewegung ist beschränkt stabil

Für die Lage von konjugierten Punkten zu einander lässt sich hier, wie bei den Planetenellipsen, ein Analogon zur Lindelöfschen Konstruktion bei der Rotationsfläche von kleinster Oberfläche aufstellen[1]).

Es sei o' die Polare des Punktes O' inbezug auf die Hyperbel, dann schneiden sich Tangenten, die in den Endpunkten einer Sehne durch O' an die Kurve gelegt werden, auf o', d. h.

Tangenten in konjugierten Punkten schneiden sich auf einer festen Graden, der dem Punkte O' zugehörigen Leitlinie der Hyperbel.

Ich bestimme jetzt die Enveloppe aller Extremalen durch einen festen Punkt P (Figur 6). Q sei der zu P auf einer Extremalen konjugierte Punkt, O' deren zweiter Brennpunkt. Dann ist, da die reelle Achse aller Hyperbeln $= \frac{1}{h}$ ist,

[1]) Lindelöf, Mathematische Annalen, Bd. II (1870), pag. 160.

$$PO - PO' = \frac{1}{h},$$

$$QO - QO' = \frac{1}{h}, \quad \text{daher ist}$$

$$QP - QO = PO - \frac{2}{h},$$

also konstant für alle durch P gelegten Bahnkurven. Der Punkt Q beschreibt mithin einen Hyperbelzweig, dessen Brennpunkte O und P sind; die reelle Achse ist

$$= \left| PO - \frac{2}{h} \right|;$$

der Zweig wendet dem Punkt O die konvexe oder konkave Seite zu, je nachdem

$$QP \lessgtr QO, \text{ d. h.}$$
$$PO \lessgtr \frac{2}{h} \text{ ist.}$$

Für $PO = \frac{2}{h}$ ist die Kurve eine Grade, die Mittelsenkrechte von OP. Die Enveloppe aller Extremalen durch einen Punkt ist also ein Hyperbelzweig, der diesen Punkt und das Kraftzentrum O zu Brennpunkten hat und den um O mit dem Radius $\frac{1}{h}$ beschriebenen Kreis berührt.

§ 5. $U = +r^2$.

Die Gleichung der Bahnkurve ist folgende:

$$\frac{2a^2}{r^2} = \sqrt{4a^2 + h^2}\cos 2(\varphi - \varphi_0) + h.$$

Führe ich kartesische Koordinaten ein, indem ich setze:

$$x = r\cos(\varphi - \varphi_0), \; y = r\sin(\varphi - \varphi_0),$$

so ergibt sich die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt das Kraftzentrum ist:

$$1.) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \quad \text{Dabei ist}$$

$$\alpha^2 = \frac{2a^2}{h + \sqrt{4a^2 + h^2}}, \quad \beta^2 = \frac{2a^2}{-h + \sqrt{4a^2 + h^2}},$$
$$\beta^2 - \alpha^2 = h.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass für $h > 0$ die imaginäre Halbachse grösser ist als die reelle, dass dann also der Winkel der Asymptoten, in welchem die Hyperbel liegt, stumpf ist. Für $h = 0$ ist die Hyperbel gleichseitig, für $h < 0$ ist der Asymptotenwinkel spitz.

Als Bahnkurve kommt immer nur ein Zweig der Kurve in Betracht.

Ich setze $\alpha^2 = o$, dann ist $\beta^2 = o + h$, dann lautet die Gleichung einer Bahnkurve

$$2.) \quad (x^2 - y^2)\, o + x^2 h - o^2 - oh = 0.$$

Jede Kurve enthält zwei Parameter, o und φ_0, da die Lage des Koordinatensystems und somit x und y von φ_0 abhängen. Es ist

$$x = r \cos(\varphi - \varphi_0), \quad y = r \sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi_0} = + y, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} = - x.$$

Somit lautet die Gleichung einer benachbarten Bahnkurve

$$3.) do(x^2 - y^2 - 2o - h) + d\varphi_0[4oxy + 2hxy] + (x^2 - y^2)o + x^2 h - o^2 - oh = 0.$$

Für die Schnittpunkte einer Kurve mit einer ihr benachbarten folgt daher die Gleichung

$$- \frac{d\varphi_0}{do}\,(4o + 2h) = \frac{x^2 - y^2 - 2o - h}{xy}.$$

Der eine Schnittpunkt $P(x_1 y_1)$ sei jetzt gegeben, dann ist

$$- \frac{d\varphi_0}{do}\,(4o + 2h) = \frac{x_1^{\,3} - y_1^{\,2} - 2o - h}{x_1 y_1} = c$$

eine bekannte Grösse. Daher gilt für alle Schnittpunkte beider Kurven die Beziehung

$$4.) \quad x^2 - y^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = c.xy,$$
$$\text{da } 2o + h = \alpha^2 + \beta^2.$$

Die Gleichung 4.) bedeutet eine gleichseitige Hyperbel, die das Kraftzentrum zum Mittelpunkt hat und durch die Brennpunkte der Hyperbel 2.) geht.

Um also zu einem Punkte P_1 auf einer Bahnkurve einen konjugierten zu finden, lege ich durch P_1 und die Brennpunkte der Kurve diejenige gleichseitige Hyperbel,

welche das Kraftzentrum zum Mittelpunkte hat, und bestimme ihre weiteren Schnittpunkte mit der Bahnkurve.

Damit ist aber immer noch nicht entschieden, ob wirklich ein zu P_1 konjugierter Punkt vorhanden ist. Ich betrachte einen bestimmten Zweig der Kurve

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

etwa den rechten. Er lässt sich in Parameterform darstellen durch die Gleichungen

$$x = \alpha \operatorname{Cof} t, \quad y = \beta . \operatorname{Sin} t.$$

Diese Werte setze ich in die Gleichung 4.) ein. Dann erhalte ich

$$5.) \quad \alpha^2 \operatorname{Tg}^2 t - c\alpha\beta \operatorname{Tg} t - \beta^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\operatorname{Tang} t = \frac{\operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cof} t}$. Ihre beiden Wurzeln seien Tg_1 und Tg_2, dann ist

$$6a.) \quad \operatorname{Tg}_1 . \operatorname{Tg}_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\left(1 + \frac{h}{\alpha^2}\right),$$

$$6.) \quad \operatorname{Tg}_2 = -\frac{1 + \frac{h}{\alpha^2}}{\operatorname{Tg}_1}.$$

Im Endlichen ist stets $|\operatorname{Tg} t| < 1$; es sei jetzt t_1 beliebig gegeben, $\operatorname{Tg}_1 = \operatorname{Tang} t_1$. Dann ist für $h \geqq 0$ die rechte Seite der Gleichung 6.) dem absoluten Werte nach grösser als 1, es gibt daher keinen Wert t_2, so dass

$$\operatorname{Tg} t_2 = -\frac{1 + \frac{h}{\alpha^2}}{\operatorname{Tg} t_1}$$

wäre. Für $h \geqq 0$ gibt es also keinen zu dem Punkte $P(x_1 y_1 t_1)$ konjugierten Punkt, wie schon am Beginn von Kapitel I erwähnt wurde.

Ich betrachte nun den Fall $h < 0$. Dann ist

$$0 < \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{h}{\alpha^2} < 1.$$

Es sei t_0 Wurzel der Gleichung $\mathfrak{Tg}t = 1 + \frac{h}{\alpha^2}$. Die Gleichung besitzt genau eine Wurzel.

Die Gleichung 6.) besitzt nur dann eine Lösung t_2, und zwar genau eine, wenn die rechte Seite dem absoluten Werte nach nicht grösser als 1 ist, wenn also

$$|\mathfrak{Tg}t_1| \geqq 1 + \frac{h}{\alpha^2},\ t_1 \geqq t_0$$

ist. Wenn t_1 von t_0 bis $+\infty$ wächst, so steigt $\mathfrak{Tang}t_1$ von $1 + \frac{h}{\alpha^2}$ bis 1, $\mathfrak{Tg}t_2$ steigt von

$$-1 \text{ bis } -\left(1 + \frac{h}{\alpha^2}\right),$$

t_2 von $-\infty$ bis $-t_0$.

Wenn also der Parameter t_1 des Punktes P_1 von t_0 bis ∞ geht, bewegt sich der des konjugierten Punktes, t_2, von $-\infty$ bis $-t_0$. Wir erhalten daher ganz ähnlich wie in § 2, § 4 das Resultat:

Auf jeder Bahnkurve sind zwei Punkte R und R' vorhanden, die den Parameterwerten $\mp t_0$ entsprechen. Zu keinem Punkte zwischen ihnen gibt es einen konjugierten, wohl aber zu jedem Punkte ausserhalb des Bogens RR'. Bewegt sich ein Punkt auf dem oberen Kurventeile von ∞ bis R, so bewegt sich der konjugierte auf der unteren Kurvenhälfte von R' bis ∞. Die Bewegung ist beschränkt stabil.

Die Gleichung 6a.) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Es seien x_1y_1, x_2y_2 die Koordinaten zweier konjugierter Punkte, dann ist

$$x_1 = \alpha\mathfrak{Cof}t_1\ \ y_1 = \beta\mathfrak{Sin}t_1,\ \ x_2 = \alpha\mathfrak{Cof}t_2\ \ y_2 = \beta\mathfrak{Sin}t_2.$$

Diese Werte setze ich ein, dann folgt:

$$7.)\quad \alpha^4 y_1 y_2 + \beta^4 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Tangenten, die man in den beiden Punkten $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ an die Hyperbel legt, auf einander senkrecht stehen. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Tangenten, die man in zwei zu einander konjugierten Punkten an eine Bahnkurve legt, stehen aufeinander senkrecht und schneiden sich daher auf Grund eines Kegelschnittsatzes auf dem um das Zentrum mit dem Radius $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{-h}$ beschriebene Kreise.

Wir haben somit ein Analogon zur Lindelöfchen Kettenlinienkonstruktion erhalten.

Der Kreis ist zugleich die Grenzkurve des mechanischen Problems, in deren Inneres keine Extremale eindringen kann, da dort $r^2+h<0$, $\sqrt{U+h}=\sqrt{r^2+h}$ imaginär ist.

Es soll jetzt die Enveloppe aller Extremalen durch einen festen Punkt P bestimmt werden, und zwar wie in § 4 geometrisch (Fig. 7). O sei das Kraftzentrum. Da die Bahnhyperbeln O zum Mittelpunkte haben, so müssen alle Extremalen durch P auch durch P' gehen, den zu P inbezug auf O symmetrischen Punkt, und eine Kurve, die PS zur Tangente hat, muss auch die durch P' zu PS gezogene Parallele $P'T$ in P' berühren. Ich beschreibe um O mit $\sqrt{-h}$ den Kreis und denke mir die Extremale durch P festgelegt, die PS berührt. U sei der zweite Schnittpunkt von $P'T$ mit dem Grenzkreise. Da $PO=P'O$, $PS \parallel P'U$, so ist SU ein Durchmesser des Kreises und

$$ST \perp PS,\ ST \perp P'T.$$

Da ferner Tangenten in konjugierten Punkten aufeinander senkrecht stehen und sich auf der Grenzkurve schneiden, so muss Q, der zu P konjugierte Punkt, auf TS liegen. Nun wird bei einem Kegelschnitte das Stück einer Tangente, das zwischen zwei anderen Tangenten liegt, durch deren Berührungssehne und den Berührungspunkt harmonisch geteilt. Daher ist Q der vierte harmonische Punkt zu T, S und V, dem Schnittpunkte von PP' mit QT. Ziehe ich durch Q die Parallele zu PS und $P'T$, welche die Verlängerung von PP' in O' schneidet, so sind auch

$$P'\ P\ O'\ V$$

vier harmonische Punkte. Da die Strahlen QV, QO' aufeinander senkrecht stehen, so halbiert QS den Winkel PQP';

es ist ferner $PS \perp QS$. Es sei X der Schnittpunkt von QP' mit PS, dann folgt hieraus

$$QP = QX.$$

Ferner ist S die Mitte von PX, O von PP', also ist $P'X = 2\,OS = 2\sqrt{-h}$,

$$QP' - QP = 2\sqrt{-h}.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass der zu P konjugierte Punkt einen Hyperbelzweig beschreibt. Die Enveloppe aller durch einen festen Punkt P gehenden Bahnkurven ist ein Hyperbelzweig, dessen Brennpunkte P und der zu P inbezug auf O symmetrische Punkt P' sind und der dem Punkte P seine konkave Seite zuwendet; die reelle Achse ist $= 2\sqrt{-h}$.

§ 6. $U = -r^2$, $h > 0$.

Die Bahnkurven sind Ellipsen, zwischen deren Halbachsen α, β die Relation besteht

$$\alpha^2 + \beta^2 = h.$$

Ganz wie in § 5 ergibt sich zur Bestimmung der zu einem Punkte $P_1(x_1 y_1)$ auf der Kurve

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

konjugierten Punkte die Gleichung

$$4'.) \quad x^2 - y^2 - (\alpha^2 - \beta^2) = cxy.$$

Dabei ist

$$c = \frac{x_1^2 - y_1^2 - (\alpha^2 - \beta^2)}{x_1 y_1}.$$

Ich setze

$$x = \alpha \cos t, \quad y = \beta \sin t,$$
$$-\pi \leq t < +\pi.$$

Diese Werte setze ich in Gleichung 4'.) ein und erhalte schliesslich

$$5'.) \quad \operatorname{tang}^2 t + \frac{c\beta}{\alpha} \operatorname{tang} t - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tang} t$. Ihre Wurzeln seien tg_1 und tg_2. In dem Intervalle

$$-\pi \leq t < +\pi$$

entsprechem jedem Werte von tang zwei Werte von t, die sich um π unterscheiden. Daher ergeben sich, wenn tg_1 und tg_2 reell sind, vier Werte für t,

$$t_1,\ t'_1 = t_1 + \pi,$$
$$t_2,\ t'_2 = t_2 + \pi.$$

Aus Gleichung 5′.) folgt

$$6'.)\quad tg_1\ tg_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Da der Punkt $P_1(x_1,y_1)$ auf einer Bahnkurve reell willkürlich gegeben ist, so ist t_1, t'_1 stets reell, dann aber auch zufolge der Gleichung 6′.) t_2, t_2'. Zu jedem Punkte P_1 existieren daher stets genau zwei konjugierte Punkte, einer nach rechts hin, einer nach links:

$P_2(x_2 = \alpha\cos t_2,\ y_2 = \beta\sin t_2)$, $P'_2(x'_2 = \alpha\cos t'_2,\ y'_2 = \beta\sin t'_2)$.

Da $t'_2 = t_2 + \pi$, so sind die Punkte P_2 und P'_2 inbezug auf O symmetrisch. Der Punkt P'_1, der zu P_1 inbezug auf O symmetrisch liegt, ist nicht zu P_1 konjugiert, da zwischen P_1 und P'_1 auf der Kurve bereits P_2 bezw. P'_2 liegt. In einer bestimmten Richtung gibt es also zu jedem Punkte einen konjugierten Punkt, zu diesem wieder einen, u. s. f.

Daher ist hier die Bewegung oszillierend stabil.

Setze ich in Gleichung 6′.)

$$x_1 = \alpha\cos t_1,\ y_1 = \beta\sin t_1,\ x_2 = \alpha\cos t_2,\ y_2 = \beta\sin t_2,$$

so folgt die Gleichung

$$7'.)\ \alpha^4 y_1 y_2 + \beta^4 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet, dass die in den Punkten P_1, P_2 an die Ellipse gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen.

Daher ergibt sich wie in § 5: Tangenten in konjugierten Punkten stehen auf einander senkrecht, sie schneiden sich daher auf dem um O mit dem Radius $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{h}$ beschriebenen Kreise, der Grenzkurve.

Ich erhalte weiterhin durch eine ähnliche Betrachtung wie in § 5: die Enveloppe aller durch einen festen Punkt P gehenden Extremalen ist eine Ellipse, deren Brennpunkte P und der zu P inbezug auf O symmetrische Punkt P′ sind; ihre grosse Achse ist $= 2\sqrt{h}$.

Kapitel 2.

Die Gestalt der Bahnkurven für die Fälle, in denen das Potential $U = \pm r^n$, n eine beliebige ganze Zahl ist.

§ 7. Allgemeines.

Ich setze $U = \varepsilon r^n$; ε bedeute die positive oder negative Einheit. Zur Bestimmung der Bahnkurven liefert das Prinzip der kleinsten Aktion die Gleichung

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2(h + \varepsilon r^n) - a^2}}.$$

Die Integrationskonstanten sind a, φ_0. Ich setze nun fest für die weitere Untersuchung, dass

1.) a eine positive Grösse sei: das Vorzeichen werfe ich auf die Quadratwurzel.

2.) Der Radiusvektor r nur positive Werte annehmen darf.

Den trivialen Fall $n = 0$ will ich ausschliessen, es sei also stets $n \gtrless 0$.

Wenn im folgenden $\sqrt{r^2(h + \varepsilon r^n) - a^2}$ geschrieben wird, so soll damit der positive Wert der Quadratwurzel gemeint sein. Der negative Wert soll durch das vorgesetzte Minuszeichen angedeutet werden. Die Gestalt der Bahnkurven ist wesentlich davon abhängig, ob U positiv oder negativ, h positiv, 0 oder negativ ist. Daher ergibt sich folgende Einteilung:

$$\begin{aligned} &\varepsilon = +1, \quad h > 0. \\ &\varepsilon = +1, \quad h = 0. \\ &\varepsilon = +1, \quad h < 0. \\ &\varepsilon = -1, \quad h > 0. \end{aligned}$$

Ferner werden auch wesentliche Unterschiede sich ergeben, je nachdem die ganze Zahl n über oder unter einer bestimmten Zahl, etwa 0, -1, -2 liegt.

In allen Fällen

$$\varepsilon = +1,\ n > 0 \text{ und } \varepsilon = -1,\ n < 0$$

ist $\partial U/\partial r$ positiv, die Kraft eine abstossende, die Bahnkurven sind daher gegen das Kraftzentrum konvex.

In den Fällen

$$\varepsilon = +1,\ n < 0 \text{ und } \varepsilon = -1,\ n > 0$$

ist $\partial U/\partial r$ negativ, die Kraft ist eine anziehende, die Kurven sind gegen das Zentrum konkav.

§ 8. Hilfssätze.

Es sei auf folgende Sätze hingewiesen, die sich unmittelbar aus Sätzen der Integralrechnung ergeben [1]).

1.) Es sei $f(r)$ eine rationale Funktion von r, die für $r = \alpha$ verschwindet. Dann konvergiert

$$\int^{\alpha} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$$

oder wird unendlich gross, je nachdem α eine eine einfache oder mehrfache Nullstelle von $f(r)$ ist.

2.) Wenn die rationale Funktion $f(r)$ für $r = 0$ unendlich wird, so konvergiert

$$\int^{0} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Ist dagegen $f(r)$ an der Stelle 0 endlich, so wird

$$\int^{0} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$$

unendlich gross.

3.) Wenn die rationale Funktion $f(r)$ an der Stelle $r=\infty$ unendlich gross wird, so konvergiert

$$\int^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$$

Ist dagegen $f(\infty)$ endlich, so wird das Integral unendlich gross.

Ferner werden später noch folgende Sätze benutzt werden:

4.) Es sei $f(r)$ im Intervalle

$$r_0 \leqq r \leqq r_1$$

[1]) Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, deutsch bearbeitet von Harnack, 469—473.

eine stetige Funktion von r, die in diesem Intervalle nicht negativ wird; $f(r)$ habe ferner $r = r_1$ zur einfachen oder mehrfachen Nullstelle, und ε sei eine positive Grösse. Dann wird mit unbegrenzt abnehmendem ε das Integral

$$I = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{f(r)+\varepsilon}$$

beliebig gross.

Denn es gibt eine positive endliche Zahl M von der Art, dass in dem Intervalle

$$\frac{f(r)}{r_1 - r} < M$$

ist. Daher ist

$$I > \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{M(r_1 - r)+\varepsilon} = \frac{1}{M} \ln \left\{ 1 + \frac{M(r_1 - r_0)}{\varepsilon} \right\}.$$

Mit abnehmendem ε wird aber $\frac{M(r_1 - r_0)}{\varepsilon}$ beliebig gross, daher auch I.

5.) Es sei $f(t,\alpha)$ für

$$0 < t < 1, \ \alpha_0 \geq \alpha \geq 0$$

eine positive stetige Funktion von α und von t. Ferner konvergiere

$$I(\alpha) = \int_0^1 f(t,\alpha)dt$$

gleichmässig für jeden Wert α des Intervalles $\alpha_0 \geq \alpha \geq 0$ [1]).

Dann ist

$$\lim_{\alpha=0} I(\alpha) = \int_0^1 f(t,0)dt$$

Es sei ε beliebig klein gegeben, dann kann ich auf Grund der gleichmässigen Konvergenz des Integrals $I(\alpha)$ die Grösse δ so klein bestimmen, dass für jeden Wert α des Intervalles $\alpha_0 \geq \alpha \geq 0$

[1]) $f(t,\alpha)$ kann für $t = 0$ und $t = 1$ unendlich werden.

$$\left|\int_0^{\delta} f(t,\alpha)dt\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \left|\int_{1-\delta}^{1} f(t,\alpha)dt\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

ist. Ferner kann ich nach Fixierung von δ die Grösse α so nahe an 0 auf Grund der Stetigkeitseigenschaften von f bestimmen, dass

$$\left|\int_{\delta}^{1-\delta} [f(t,\alpha) - f(t,0)]\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{wird.}$$

Dann ist $$I(\alpha) - \int_0^1 f(t,0)dt = \int_0^{\delta} f(t,\alpha)dt - \int_0^{\delta} f(t,0)dt$$

$$+ \int_{1-\delta}^{1} f(t,\alpha)dt - \int_{1-\delta}^{1} f(t,0)dt + \int_{\delta}^{1-\delta} [f(t,\alpha) - f(t,0)]dt.$$

$$\left|I(\alpha) - \int_0^1 f(t,0)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \lim_{\alpha=0} \left\{ I - \int_0^1 f(t,0)dt \right\} = 0.$$

§ 9. $\varepsilon = +1$, $U = +r^m$, $h > 0$.

A.) $n + 2 > 0$.

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{a dr}{r\sqrt{r^2h + r^{n+2} - a^2}}.$$

Damit $\sqrt{r^2h + r^{n+2} - a^2}$ reell ist, darf der Radikand nicht negativ werden. Die Funktion $r^2h + r^{n+2} - a^2$ besitzt die Ableitung $2rh + (n+2)r^{n+1}$, welche für $0 < r < \infty$ positiv und von 0 verschieden ist. Die Funktion selbst ist $= -a^2$ für $r = 0$, $= \infty$ für $r = \infty$, besitzt daher genau eine einfache positive Nullstelle α und ist positiv für $r > \alpha$.

Das Integral $\int_{\alpha}^{\cdot} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2h + r^{n+2} - a^2}}$ konvergiert daher auf Grund von § 8, 1, ebenso konvergiert

$$\chi = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2h + r^{n+2} - a^2}} \quad \text{nach § 8,3.}$$

Daher kann ich die Gleichung der Bahnkurve schreiben

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h + r^{n+2} - a^2}}$$

Ich kann von α bis r integrieren sowohl indem ich der Wurzel das positive wie das negative Vorzeichen gebe, da bei $r = \alpha$ die Wurzel durch 0 hindurchgeht. Ich erhalte so zu jedem Werte von r zwei entgegengesetzt gleiche von $\varphi - \varphi_0$. Daher ist die Bahnkurve symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_0$. Der Radiusvektor r bewegt sich von α bis ∞, $\varphi - \varphi_0$ von 0 bis $\pm \varkappa$, daher geht die Bahnkurve ins Unendliche und befindet sich ganz in dem Winkelraum $2\varkappa$.

Für $r = \alpha$ ist $\varphi = \varphi_0$. In diesem Punkte schneidet die Kurve die Gerade $\varphi = \varphi_0$ rechtwinklig und hat dort ein Perizentrum [1]), denn es ist

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{r=\alpha} = 0, \quad \left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right)_{r=\alpha} = \infty.$$

Für $n > 0$ ist sie konvex gegen den Pol O und hat daher annähernd die Gestalt eines Hyperbelzweiges, der dem Pole seine konvexe Seite zuwendet. Für $n < 0$ ist sie gegen den Pol konkav, sie ist für $n = -1$ geradezu eine Hyperbel. (Figur 8).

Mit diesen Ergebnissen stimmt überein, dass der Winkelraum $2\varkappa$, in welchem die Bahnkurve verläuft, $\gtrless \pi$ ist, je nachdem $n \gtrless 0$ ist.

Es ist

$$\varkappa = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h + r^{n+2} - a^2}} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2 h + r^{n+2}}{\alpha^2 h + \alpha^{n+2}} - 1}},$$

denn es ist

$$a^2 = \alpha^2 h + \alpha^{n+2}.$$

[1]) Wittaker, Analytical Dynamics, pag. 84.

Ich substituiere $r = \alpha . t$, dann ist $t \geqq 1$, weil $r \geqq \alpha$ ist.

$$\varkappa = \int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2 \frac{h + \alpha^n t^n}{h + \alpha^n} - 1}} .$$

Der Bruch $\frac{h + t^n \alpha^n}{h + \alpha^n}$ ist $\gtrless 1$, je nachdem $n \gtrless 0$ ist. Also ist, je nachdem $n \gtrless 0$ ist,

$$\varkappa \lessgtr \int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} .$$

B.) $n + 2 = 0$.

Die Funktion $r^2 h + r^{n+2} - a^2 = r^2 h + 1 - a^2$ besitzt eine einfache oder gar keine Nullstelle, je nachdem $a \gtrless 1$ ist.

Im ersten Falle erhält man wie vorher eine Kurve von der Gestalt ungefähr eines Hyperbelzweiges, welcher dem Pole seine konkave Seite zuwendet, falls $\varkappa < \pi$ ist. Wenn jedoch $\varkappa > \pi$, 2π, 3π ist, dann umwindet die Kurve den Pol erst einmal, zweimal, dreimal, bevor sie ins Unendliche läuft (Figur 9).

Für $a = 1$ ist die Kurve die Spirale

$$r(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{h}} ,$$

für $a < 1$ ist sie die Spirale

$$r \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} (\varphi - \varphi_0) = \sqrt{\frac{1 - a^2}{h}} ,$$

welche aus dem Unendlichen kommt und den Pol unendlich oft umkreist, um ihm beliebig nahe zu kommen.

C.) $n + 2 < 0$.

Ich setze $-(n + 2) = m > 0$. Die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h + \frac{1}{r^m} - a^2}} .$$

Es sei

$$\mu = (m+2)\sqrt[m+2]{\frac{h^m}{4m^m}}.$$

Die Funktion $r^2h + \frac{1}{r^m}$ fällt im Intervalle $0 < r < \sqrt[m+2]{\frac{m}{2h}}$ von ∞ bis μ, im Intervalle $\sqrt[m+2]{\frac{m}{2h}} < r < \infty$ steigt sie von μ bis ∞.

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

1.) $a^2 < \mu$. Dann ist die Funktion positiv für jeden Wert von r, $\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}$ ist reell für jeden positiven Wert von r. Das Integral $\int_0 \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}$ konvergiert auf Grund von § 8,2, ebenso konvergiert das Integral $\int_{\cdot}^{\infty} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}$ nach § 8,3.

Ich schreibe die Gleichung der Bahnkurve in der Form

$$\varphi - \varphi_0 = + \int_{\cdot}^{r} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Lasse ich r von 0 bis ∞ steigen, so bleibt die Wurzel stets von 0 verschieden, kann also ihr Vorzeichen nicht wechseln, $\varphi - \varphi_0$ steigt von 0 bis $\varkappa = \int_0^{\infty} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}$.

Die Kurve kann über den Pol O hinaus nicht fortgesetzt werden, denn O ist ein singulärer Punkt im Sinne des Prinzips der kleinsten Aktion: es ist dort die Aktion

$$= \int_0 \frac{ds}{r}\sqrt{\frac{1}{r^m} + hr^2} = \int_0 \frac{dr\left(r^2h + \frac{1}{r^m}\right)}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}} = \infty.$$

Die Kurve berührt die Gerade $\varphi = \varphi_0$ im Punkte O, denn es ist

$$\left.\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right|^{r=0} = \left.\frac{a}{\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}\right|^{r=0} = 0.$$

Sie ist gegen O konkav, mit wachsendem $\varphi - \varphi_0$ wächst auch r, sie entfernt sich daher immer weiter vom Pol und geht ins Unendliche. Figur 10 stellt zwei Bahnkurven dar für

$$m=2, h=\frac{1}{81}, a=\frac{1}{3}, \varkappa=2{,}1565; m=2, h=\frac{1}{81}, a=\frac{1}{3}\sqrt{2\cos 10^0}, \varkappa=5{,}377.$$

Die Gleichung der Kurve lautet umgeformt

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \cdot \frac{\mathrm{dn}v - k'\mathrm{sn}v}{\mathrm{cn}v}, \; v = K - 2\varphi . \frac{\sqrt[4]{h}}{a}, k^2 = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4\sqrt{h}}.$$

Dabei sind $\mathrm{sn}v$, $\mathrm{cn}v$, $\mathrm{dn}v$ die Jacobischen elliptischen Funktionen, k der Modul, k' der komplementäre Modul, K das vollständige Integral erster Gattung.

Es ist $\varkappa$ eine steigende Funktion von a; da sich a zwischen 0 und $\sqrt{\mu}$ bewegt, so kann sich $\varkappa$ von 0 bis ∞ ändern; es ist nämlich

$$\lim_{a=\sqrt{\mu}} \int_0^\infty \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}} = \infty.$$

Das ergibt sich folgendermassen. Die Funktion $r^2h + \frac{1}{r^m} - \mu$ besitzt eine doppelte Nullstelle $r_1 = \sqrt[m+2]{\frac{m}{2h}}$. Setze ich also

$$f(r) = \frac{r}{a}\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2},$$

so ist $f(r)$ durch $r_1 — r$ teilbar, setze ich ferner

$$\varepsilon_r = \frac{r}{a}\left(\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2} - \sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - \mu}\right),$$

so ist, da $a^2 < \mu$, ε_r eine positive Grösse. Es sei r_0 irgend eine Zahl, die zwischen 0 und r_1 liegt, dann ist

$$\varkappa = \int_0^\infty \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}} > \int_{r_0}^{r_1} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{f(r) + \varepsilon_r}.$$

Lasse ich a an $\sqrt{\mu}$ herankommen, so wird ε_r gleichmässig für $r_0 \leq r \leq r_1$ beliebig klein, das Integral $\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{f(r) + \varepsilon_r}$ und damit $\varkappa$ wird dann nach § 8,4 beliebig gross.

$\varkappa$ kann also sehr gross werden, die Kurve daher den Punkt O beliebig oft umwinden.

2.) $a^2 > \mu$.

Dann besitzt die Funktion $r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2$ zwei einfache positive Nullstellen α, β, $\alpha < \beta$, und ist positiv für

$$0 < r < \alpha \text{ und } \beta < r < \infty.$$

In diesen Intervallen ist $\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}$ reell. Jede Kurve zerfällt daher in zwei getrennte Teile, die untereinander nicht zusammenhängen.

I. $\beta \leq r < \infty$.

$$\varphi - \varphi_0 = \int_\beta^r \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}$$

Dieser Kurvenzweig ist genau zu untersuchen wie die Bahn in § 9A. Er hat die Gestalt ungefähr eines Hyperbelzweiges, der dem Zentrum seine konkave Seite zuwendet, solange der Winkelraum, in dem er verläuft, zwischen π und 2π liegt.

Der Winkelraum ist

$$2\varkappa = 2\int_{\beta}^{\infty} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Die Grösse $2\varkappa$ bewegt sich zwischen π und ∞. Falls $2\varkappa > 2\pi$ ist, umkreist die Kurve den Pol einmal, zweimal u. s. f., bevor sie ins Unendliche geht, es gilt daher hier dasselbe wie bei der Kurve $n + 2 = 0$, $a > 1$, Figur 9.

II. $0 \leq r \leqq \alpha$.

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int_{r}^{\alpha} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Die Kurve verläuft ganz innerhalb des Kreises $r = \alpha$. Im Punkte $r = \alpha$, $\varphi = \varphi_0$ verschwindet die Quadratwurzel und wechselt daher dort ihr Vorzeichen. Je nachdem ich der Wurzel bei der Integration von α bis r das positive oder negative Zeichen gebe, erhalte ich für einen Wert von r zwei entgegengesetzt gleiche von $\varphi - \varphi_0$. Die Kurve ist also symmetrisch zur Graden $\varphi = \varphi_0$, welche sie im Punkte $r = \alpha$ rechtwinklig schneidet; es ist nämlich

$$\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right)_{r=\alpha} = \left(\frac{a}{\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}\right)_{r=\alpha} = \infty.$$

Wenn r von α bis 0 fällt, steigt $|\varphi - \varphi_0|$ von 0 bis

$$\varkappa = \int_{0}^{\alpha} \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Die Kurve berührt im Punkt O die Geraden $\varphi = \varphi_0 \pm \varkappa$. Denn es sei λ der Winkel zwischen Radiusvektor und Kurventangente, dann ist

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{\pm a}{\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}},$$

mithin $= 0$ für $r = 0$, $\varphi = \varphi_0 \pm \varkappa$. Die Kurve hat daher im Punkte O stets eine Ecke, ausser wenn der Winkelraum $2\varkappa$, in dem sie verläuft, ein ganzzahliges ungrades Vielfaches von π ist.

Sie ist konkav gegen den Pol. Sie kann aus demselben Grunde wie im Falle $a^2 < \mu$ nicht über den Punkt O hinaus fortgesetzt werden. —

Es ist $\mu < a^2 < \infty$, daher $\frac{m}{2h} > \alpha^{m+2} > 0$; α ist die Wurzel der Gleichung $\alpha^2 h + \frac{1}{\alpha^m} = a^2$, und zwar die kleinere, liegt also vor der Stelle $\sqrt[m+2]{\frac{m}{2h}}$, an welcher die Funktion $r^2 h + \frac{1}{r^m}$ ihr Minimum erreicht. Es ist nun, wenn ich $r = \alpha t$ setze:

$$\varkappa = \int_0^{\alpha} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h + \frac{1}{r^m} - a^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{\frac{h(\alpha t)^{m+2} + 1}{t^m(h\alpha^{m+2} + 1)} - 1}}, \quad t \leq 1.$$

Ganz ähnlich wie im Falle $a^2 < \mu$ erkenne ich, dass

$$\lim_{a = \sqrt{\mu}} \varkappa = \infty.$$

Ferner folgt aus § 8,5, wenn ich

$$f(t,\alpha) = \frac{1}{t\sqrt{\frac{h(\alpha t)^{m+2} + 1}{t^m(h\alpha^{m+2} + 1)} - 1}}, \quad \alpha_0 = \sqrt[m+2]{\frac{m}{4h}} \text{ setze,}$$

$$\lim_{\alpha = 0} \varkappa = \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{t^{-m} - 1}}.$$

Die Grösse $\varkappa$ geht also von

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^m} - 1}} \text{ bis } \infty.$$

Für $m = 1$, $n = -3$ z. B. ist $\infty > 2\varkappa > 2\pi$, für $n = -4$, $m = 2$: $\infty > 2\varkappa > \pi$.

Je grösser m wird, desto kleiner wird die untere Grenze für $\varkappa$. Für $\varkappa < \pi/2$ hat die Kurve ungefähr die Gestalt einer halben Lemniskate. Je grösser $\varkappa$ ist, desto öfter umwindet sie den Pol. Figur 11 stellt die Gestalt zweier solcher Bahnkurven dar für

$$m=2, h=\frac{1}{2500}, a=\frac{\sqrt{5}}{10}, \varkappa = 1{,}813 < \pi;$$

$$m = 2, \quad h = \frac{1}{625\cos^2 5},$$

$$a = \frac{1}{5}\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2 5}}, \quad \varkappa = 5{,}407 > \pi.$$

3.) $a^2 = \mu$. Dieser Fall ist die Grenze zwischen 1.) und 2.) Man erkennt hier deutlich, wie die Kurve von 1.) übergeht in die von 2.), indem sie sich in zwei Teile spaltet. — Da a^2 gerade gleich dem Minimum μ der Funktion $r^2h + r^{-m}$ ist, so besitzt die Gleichung

$$r^2h + \frac{1}{r^m} = a^2$$

genau eine doppelte positive reelle Wurzel $\alpha = \sqrt[m+2]{\frac{m}{2h}}$.

$\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}$ ist reell für jedes positive r.

$\int_\alpha \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}$ ist unendlich gross nach § 8,1. Daher zerfällt eine Bahnkurve in zwei Teile,

$$\text{I.} \quad \varphi - \varphi_0 = \int_0^r \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}, \quad r < \alpha,$$

$$\text{II.} \quad \varphi - \bar{\varphi}_0 = -\int_r^\infty \frac{adr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}, \quad r > \alpha.$$

Die Grössen φ_0, $\bar{\varphi}_0$ sind zwei willkürliche Integrationskonstanten.

Lasse ich beim Teile I den Radiusvektor r von 0 bis α steigen, so wächst $\varphi - \varphi_0$ von 0 bis ∞. Diese Kurve ist also eine

Spirale, welche vom Pole ausgeht und sich asymptotisch dem Kreise $r = \alpha$ nähert, indem sie auf seiner Innenseite unendlich viele Umläufe vollführt.

Teil II ist ebenfalls eine Spirale, welche den Kreis $r = \alpha$ unendlich oft von aussen umkreist und dann ins Unendliche geht; denn wenn r von α bis ∞ wächst, steigt $\varphi - \varphi_0$ von $-\infty$ bis 0. Der Kreis $r = \alpha$ ist selbst auch eine Bahnkurve; er genügt der Differentialgleichung

$$\frac{adr}{d\varphi} = r\sqrt{r^2 h + \frac{1}{r^m} - a^2} \equiv 0.$$

Der Fall $a^2 = \mu$ ist ein spezieller Fall, da hier der Integrationskonstanten a ein fester Wert vorgeschrieben ist; von diesem Typus gibt es nur ∞^1 Kurven, während sonst ∞^2 auftreten.

§ 10. $\varepsilon = -1$, $U = +r^n$, $h = 0$.

A.) $n + 2 > 0$.

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - a^2}}.$$

$\sqrt{r^{n+2} - a^2}$ ist reell für $r \geq \alpha = \sqrt[n+2]{a^2}$.

Die Diskussion der Gleichung

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \int_\alpha^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - a^2}}, \quad r \geq \alpha$$

erfolgt in derselben Weise wie die des Falles $h > 0$, $n + 2 > 0$.

Für $n > 0$ ergeben sich hyperbelähnliche gegen den Pol konvexe Kurven, für $n = -1$ Parabeln, deren Brennpunkt der Pol ist.

B.) $n + 2 = 0$.

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \ln r.$$

Dies ist eine logarithmische Spirale.

C.) $n + 2 < 0$, $n + 2 = -m$.

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \int_r^\alpha \frac{adr}{r\sqrt{\frac{1}{r^m} - a^2}}$$

Die Wurzel ist reell für $r \leqq \alpha = \sqrt[m]{\frac{1}{a^2}}$.

Die Untersuchung erfolgt in derselben Weise und führt zu denselben Resultaten wie die des Falles $h > 0$, $n + 2 < 0$, $a^2 > \mu$, II mit der einen Ausnahme, dass für den Winkelraum $2\varkappa$ sich ein bestimmter von α unabhängiger Wert ergibt, nämlich

$$2\varkappa = 2\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^m} - 1}}.$$

Für $m = 1$ ist $\varkappa = \pi$, für $m = 2$ ist $\varkappa = \pi/2$, für $m = 4$ ist $\varkappa = \pi/4$. In diesen Fällen lässt sich auch die Gleichung der Bahnkurve durch trigonometrische Funktionen ausdrücken.

$$m = 1\colon\ \varphi - \varphi_0 = \pm\int_r^\alpha \frac{dr}{r\sqrt{\frac{\alpha}{r} - 1}},\quad r = \frac{\alpha}{2}[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)].$$

Dies ist die Gleichung einer Kardidoide.

$$m = 2\colon\ \varphi - \varphi_0 = \int_r^\alpha \frac{dr}{r\sqrt{\frac{\alpha^2}{r^2} - 1}},\quad r = \alpha\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der die Gerade $\varphi = \varphi_0$ zum Durchmesser hat, durch den Pol geht und dessen Radius $\alpha/2$ ist. Da α, φ_0 willkürlich sind, so ist die Gesamtheit aller Bahnkurven das Netz der Kreise durch den Punkt O. Da durch zwei Punkte P und P', die beide von O verschieden sind, nur ein solcher Kreis geht, so ist klar, dass keine konjugierten Punkte vorhanden sind; denn sonst müsste es Punktepaare geben, durch die zwei Bahnkurven gehen.

$$m = 4\colon\ \varphi - \varphi_0 = \int_r^\alpha \frac{a\,dr}{r\sqrt{\frac{1}{r^4} - a^2}},\quad r^2 = a^2\cos 2(\varphi - \varphi_0).$$

Dies ist die Gleichung einer Lemniskate. Die eigentliche Bahn ist eine Schleife der Kurve.

§ 11. $h < 0$, $\varepsilon = +1$.

Ich setze $h = -k$, dann ist $k > 0$.

A. $n > 0$.

Dann ist die Funktion $r^2(r^n - k)$ von $r = 0$ bis $r = \sqrt[n]{k}$ negativ; für $\sqrt[n]{k} < r < \infty$ steigt sie von 0 bis ∞, ihre Ableitung ist dabei von 0 verschieden.

Die Funktion $r^2(r^n - k) - a^2$ besitzt daher genau eine positive einfache Nullstelle $r = \alpha$ und ist positiv für $r > \alpha$. Ich schreibe die Gleichung der Bahnkurve in der Form

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2(r^n - k) - a^2}}, \quad r \geqq \alpha.$$

Die Diskussion erfolgt hier ebenso wie in den Fällen

$$h \geqq 0, \quad n + 2 > 0.$$

Es ergibt sich eine hyperbelähnliche gegen den Pol konvexe Kurve.

Der Fall $h < 0$, $n = -1$ ergibt die Planetenbahnellipse, § 3.

B.) $n < -1$.

Dann besitzt die Funktion $r^{n+2} - r^2 k - a^2$ genau eine positive einfache Nullstelle $r = \alpha$ und ist positiv für $0 < r < \alpha$, wenn a für $n = -2$ kleiner als 1, für $n < -2$ beliebig gewählt ist. Denn die Funktion $r^{n+2} - r^2 k$ ist für $n < -1$ eine beständig fallende Funktion von r, deren Ableitung für $r > 0$ gleichfalls nicht 0 wird; die Funktion ist ferner für $0 < r < \sqrt[n]{k}$ positiv. Die Gleichung der Bahnkurve lässt sich daher schreiben

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r}^{\alpha} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2 k - a^2}}, \quad 0 \leqq r \leqq \alpha.$$

Für $n = -2$ ergibt sich die in § 1 behandelte Spirale.

Für $n < -2$ erfolgt die Diskussion der Kurvengleichung wie in den Fällen $h > 0$, $n + 2 < 0$, $a^2 > \mu$, II und $h = 0$, $n + 2 < 0$.

Nur für den Winkelraum, in dem die Kurve verläuft, ergeben sich andere Grenzen. Es ist

$$\varkappa = \int_0^{\alpha} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2 k - a^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 \frac{(\alpha t)^n - k}{\alpha^n - k} - 1}}.$$

Hierbei ist gesetzt $r = \alpha t$, $a^2 = \alpha^{n+2} - \alpha^2 k$.

Ich setze $n + 2 = -m$, dann ist $m > 0$. Da sich α zwischen 0 und $\sqrt[n]{k}$ bewegt, so ändert sich $\varkappa$ innerhalb der Grenzen $\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^m} - 1}}$ und 0 auf Grund von § 8,5.

Es ist daher stets $0 < \varkappa < \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^m} - 1}}$.

Für $m = 1$ ist daher $\varkappa < \pi$, für $m = 2$ ist $\varkappa < \pi/2$, u.s.f. Für $m \geqq 2$ ist die Kurvengestalt daher einer halben Lemniskate ähnlich.

§ 12. $\varepsilon = -1$, $h > 0$.

A.) $n < 0$.

Die Funktion $hr^2 - r^{n+2}$ ist negativ für $r < \sqrt[n]{h}$, da für $r < \sqrt[n]{h}$, $n < 0$ stets $r^n > h$, $r^{n+2} \geqq hr^2$ ist. Dagegen ist die Funktion positiv für $r > \sqrt[n]{h}$ und steigt für $\sqrt[n]{h} \leqq r \leqq \infty$ von 0 bis ∞; ihre Ableitung ist in diesem Intervalle von 0 verschieden.

Die Funktion $hr^2 - r^{n+2} - a^2$ besitzt daher eine positive einfache Nullstelle $r = \alpha$ und ist positiv für $r > \alpha$.

Die Gleichung der Bahnkurve lautet daher:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}, \quad r \geqq \alpha.$$

Die Diskussion gestaltet sich wie für $n > 0$, $U = +r^n$, $h \gtreqless 0$. Es ergibt sich eine gegen Punkt O konvexe hyperbelähnliche Kurve.

B.) $n > 0$.

Hier tritt ein wesentlich neuer Typus auf, an den sich von den bereits behandelten Fällen nur der Fall $U = +1/r$, $h < 0$ anreiht.

Die Funktion $hr^2 - r^{n+2}$ steigt für $0 < r < \sqrt[n]{\frac{2h}{n+2}}$ von 0 bis M, sie fällt von da ab ständig bis $-\infty$. Es ist

$$M = \sqrt[n]{\frac{4h^2}{(n+2)^2}} \cdot \frac{hn}{n+2}.$$

Ihre Ableitung ist dabei stets von 0 verschieden ausser in den Punkten $r = 0$ und $r = \sqrt[n]{\frac{2h}{n+2}}$.

Es sei $a^2 < M$. Dann besitzt die Funktion $r^2 h - r^{n-2} - a^2$ genau zwei positive einfache Nullstellen und ist positiv für

$$\alpha < r < \beta.$$

In diesem Intervall ist auch $\sqrt{hr^2 - r^{n-2} - a^2}$ reell. Die Bahnkurve bleibt daher ganz im Endlichen und verläuft zwischen den beiden Kreisen $r = \alpha$ und $r = \beta$.

Die Kurve

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_\alpha^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}$$

ist konkav gegen den Pol und symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_0$.

Ich setze

$$K = \int_\alpha^\beta \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Lasse ich in der Kurvengleichung r von α bis β gehen und gebe ich dabei der Wurzel das positive Zeichen, so wächst $\varphi - \varphi_0$ von 0 bis K. Im Punkte $r = \beta$ verschwindet die Wurzel. Lasse ich also jetzt r von β bis α zurücklaufen, und gebe ich der Wurzel das negative Zeichen, so wächst $\varphi - \varphi_0$ weiter bis $2K$. Im Punkte $r = \alpha$ lasse ich die Wurzel wieder das Zeichen wechseln und integriere wieder bis $r = \beta$, dann wächst $\varphi - \varphi_0$ von $2K$ bis $3K$, u.s.f.

Jedem Werte von r entsprechen unendlich viele Werte von $\varphi - \varphi_0$, die sich im wesentlichen auf zwei Werte reduzieren, die entgegengesetzt gleich sind und von denen sich

alle anderen um grade ganzzahlige Vielfache von K unterscheiden. Die Kurve ist symmetrisch zu jeder Geraden $\varphi = \varphi_0 + mK$, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Die Kurve ist nur dann geschlossen, wenn K zu π in einem rationalen Verhältnis steht, z. B. für $n = 2$, $K = \pi/2$ (§ 6). Sonst aber muss sie sich unendlich oft in dem von den beiden Kreisen $r=\alpha$, $r=\beta$ begrenzten Ringe herumwinden, indem sie bald den inneren, bald den äusseren Kreis berührt.

Es ist

$$K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}$$

Ich setze

$$h = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad a^2 = \alpha^2\beta^2 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad r = \frac{\alpha}{t}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dann folgt

$$K = \int_{\lambda}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\frac{\lambda^{n+2} - 1}{\lambda^n - 1} - \frac{\lambda^n}{t^n} \cdot \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^n - 1} - t^2}}.$$

K ist also nur abhängig von dem Verhältnisse der beiden Nullstellen α und β.

Im Falle $n = 2$ erhalte ich durch die Substitution

$$\frac{t^2 - \lambda^2}{1 - t^2} = s^2: \quad K = \int_0^{\infty} \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{\pi}{2},$$

also ist hier K sogar unabhängig von λ.

Im allgemeinen wird aber K nicht unabhängig von λ sein und zu π in keinem rationalen Verhältnisse stehn.

Kapitel 3.

Die Untersuchung über konjugierte Punkte im Falle $U = \pm r^n$, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist.

§ 13. Ueber das Differenzieren eines Integrals nach einem Parameter, wenn der Integrand an einer Grenze unendlich wird.

Es gilt der Satz: Ist die Funktion $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ für jede Stelle x des Intervalles $x_0 \leqq x \leqq X$ und für den grade fixierten Wert α des Parameters eine stetige Funktion des Variablenpaares x,α, ist ferner x_0, X unabhängig von α und

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx, \quad \text{so ist} \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx\ ^{1}).$$

Dieser Satz lässt sich ausdehnen auf gewisse Fälle, in denen der Integrand an einer Grenze unstetig wird.

Es sei $f(x,\alpha)$ an der unteren Grenze unstetig, und zwar sei $f(x,\alpha) = \frac{g(x,\alpha)}{(x-x_0)^{\varepsilon}}$, wobei ε ein positiver echter Bruch, $g(x,\alpha)$ eine für $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Funktion sei. Dann ist

$$I = \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx = \int_{x_0}^{X} \frac{g(x,\alpha)}{(x-x_0)^{\varepsilon}}\,dx.$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{g(x,\alpha+\Delta\alpha) - g(x,\alpha)}{(x-x_0)^{\varepsilon}\,.\,\Delta\alpha}\,dx.$$

Es sei nun $\partial g/\partial \alpha = g_\alpha$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ eine für jede Stelle x und in der Umgebung der Stelle α stetige Funktion der Variablen x,α.

Dann ist auf Grund des Mittelwertsatzes

$$g(x,\alpha+\Delta\alpha) - g(x,\alpha) = \Delta\alpha\,.\,\frac{\partial g}{\partial \alpha}(x,\alpha+\Theta\Delta\alpha).$$

---

[1]) Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 2. Auflage, 483.

$$\frac{g(x,\alpha+\Delta\alpha)-g(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=g_\alpha(x,\alpha+\Theta\Delta\alpha).$$

Θ ist ein positiver echter Bruch.

Wenn σ eine beliebig kleine gegebene Grösse ist, kann ich auf Grund der Voraussetzung über die Stetigkeit von g_α $\Delta\alpha$ so klein wählen, dass für das ganze Intervall gleichmässig

$$|g_\alpha(x,\alpha+\Theta\Delta\alpha)-g\alpha(x,\alpha)|<\sigma.$$

Nun ist

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}-\int_{x_0}^{X}\frac{g_\alpha(x,\alpha)}{(x-x_0)^\varepsilon}\,dx\right|=\left|\int_{x_0}^{X}\frac{g_\alpha(x,\alpha+\Theta\Delta\alpha)-g\alpha(x,\alpha)}{(x-x_0)^\varepsilon}\,dx\right|$$

$$<\sigma\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{(x-x_0)^\varepsilon}=\sigma\,\frac{(X-x_0)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

Lasse ich jetzt σ und damit $\Delta\alpha$ unendlich klein werden, so folgt: $\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{g_\alpha(x,\alpha)}{(x-x_0)^\varepsilon}\,dx$. Daher folgt der Satz: Ist ε ein positiver echter Bruch und die Funktion $f(x,\alpha).(x-x_0)^\varepsilon$ und ihre partielle Ableitung nach α für jede Stelle x des Intervalles $x_0\leqq x\leqq X$ und in der Umgebung der Stelle α eine stetige Funktion der Variablen x,α, so ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{X}f(x,\alpha)\,dx=\int_{x_0}^{X}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx.$$

Dieser Satz wird bei der nun folgenden Bestimmung konjugierter Punkte fortwährend angewandt werden.

§ 14. In allen Fällen $U=+r^n$, $h\geqq 0$, in denen eine reelle Grenzkurve nicht existiert, ergibt sich das Nichtvorhandensein konjugierter Punkte, daher ist die Bewegung für $U=+r^n$, $h\geqq 0$ nicht stabil im Sinne Thomsons, oszillierend nicht stabil in dem Franks.

Das folgt unmittelbar aus einem Kriterium von Frank[1]). Als kinetische Krümmung eines Kraftfeldes wird von ihm der Ausdruck definiert

$$K(x,y)=-\frac{1}{2(U+h)^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2(U+h)^3}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]$$

Die Bewegung ist oszillierend nicht stabil, wenn $K(x,y)$ von einem Punkt der Bahn an beständig negativ oder 0 ist. Die genauere Durchsicht der Frankschen Schlüsse zeigt, dass es zu einem Punkte überhaupt keinen konjugierten gibt, wenn K längs der ganzen Bahn beständig g l e i c h 0 oder negativ ist. In unserem Falle ist $U=+r^n$,

$$K(x,y)=-\frac{hn^2r^{n-2}}{2(h+r^n)^3}.$$

Für $h\geqq 0$ ist in der Tat beständig $K(x,y)\leqq 0$.

§ 15. $\varepsilon=+1$, $U=+r^n$; $h<0$, $h=-k$.

A.) $n>0$.

Die Bahnkurve hat die Gleichung

$$\varphi-\varphi_0=\pm\int_\alpha^r\frac{adr}{r\sqrt{r^2(r^n-k)-a^2}},\ r\geqq\alpha\ (\S 11\,\mathrm{A}).$$

Damit $\sqrt{r^2(r^n-k)-a^2}$ reell ist, muss $r^2(r^n-k)\geqq a^2$ sein, daher ist stets $r^2(r^n-k)\geqq 0$.

Für das Folgende ist notwendig eine sorgfältige Scheidung zwischen der oberen Hälfte der Kurve, $\varphi-\varphi_0>0$, und der unteren, $\varphi-\varphi_0<0$.

Die Gleichung der oberen Hälfte der Kurve ist

$$1.)\ \varphi-\varphi_0=\int_\alpha^r\frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2}-kr^2-a^2}},\ \text{die der unteren}$$

$$1'.)\ \varphi-\varphi_0=-\int_\alpha^r\frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}};$$

[1]) Monatshefte für Mathematik und Physik 20, pag. 183.

wenn der Punkt P, dessen Radiusvektor $= c$ und dessen Winkelkoordinate $= \varphi_1$ ist, auf der oberen Hälfte der Kurve liegt, so ist 2.) $\varphi_1 - \varphi_0 = \int_\alpha^c \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}}$, daher ist

3.) $\varphi - \varphi_1 = \int_c^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}}$ die Gleichung

der oberen Hälfte einer Kurve, auf deren oberer Hälfte P liegt; die der unteren Hälfte derselben Kurve lautet

3′) $\varphi_1 - \varphi = \int_\alpha^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}} + \int_\alpha^c \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}}$.

Für einen zu P auf der oberen Hälfte der Kurve vorhandenen konjugierten Punkt müsste die Gleichung gelten

4) $\frac{\partial}{\partial\alpha} \int_c^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}} = \int_c^r \frac{(r^{n+2} - r^2k)dr}{r\left(\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}\right)^3} = 0.$

Da aber $r^{n+2} - r^2k > 0$ ist, so ist der Integrand $(r^{n+2} - r^2k)/r\left(\sqrt{r^{n+2} - r^2k - a^2}\right)$ beständig positiv, die Gleichung 4) besitzt daher keine Lösung ausser $P(r = c,\ \varphi = \varphi_1)$.

Wenn aber ein zu P konjugierter Punkt Q auf der unteren Hälfte der Kurve vorhanden sein soll, dann ergibt sich durch partielles Differenzieren der Gleichung 3′) nach α für den Radiusvektor r von Q die Gleichung

4′.) $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0,$

und diese Gleichung hat unter gewissen Bedingungen eine Lösung.

Es ist dabei gesetzt

$$\psi(r,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_\alpha^r \frac{adr}{r\sqrt{r^2(r^n - k) - a^2}} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 \cdot \frac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}},$$

$r = \alpha.t,\ a^2 = \alpha^2(\alpha^n - k).$

Auf Grund des § 13 ist das Differenzieren nach α unter dem Integralzeichen gestattet.

Denn die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{t^2 \cdot \dfrac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}}$ ist im ganzen Intervalle $1 \leqq t \leqq r/\alpha$ mit Ausnahme der Stelle $t=1$ eine stetige Funktion von t; an der Stelle $t = 1$ ist $f(t)\sqrt{t-1}$ stetig, und dasselbe gilt für

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{tk(t^n - 1)}{\left(\sqrt{t^2 \cdot \dfrac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}\right)^3} \cdot \frac{n\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n - k)^2}.$$

Mithin ist

$$5.)\psi(r,\alpha) = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\dfrac{r^2(r^n - k)}{\alpha^2(\alpha^n - k)} - 1}} + \frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n - k)^2}\int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{t(t^n - 1)dt}{\left(\sqrt{t^2 \cdot \dfrac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}\right)^3},$$

entsprechend $\frac{\partial}{\partial \alpha}\psi(r,\alpha)$.

Es ist $\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \dfrac{r(r^n - k)[(n+2)\alpha^n - 2k]}{2\alpha^3(\alpha^n - k)^2\left(\sqrt{\dfrac{r^{n+2} - kr^2}{\alpha^{n+2} - k\alpha^2}} - 1\right)^3}$ beständig positiv. Denn der Nenner des Bruches ist positiv, ferner ist $\alpha^{n+2} - \alpha^2 k = a^2 > 0$, $\alpha^n - k > 0$, daher a fortiori $(n+2)\alpha^n - 2k > 0$; es ist weiter $r^{n+2} - r^2 k \geqq a^2$, also $r^n - k > 0$.

Mithin ist $\psi(r,\alpha)$ eine im Intervalle $\alpha \leqq r < \infty$ steigende Funktion von r.

Für $r = \alpha$ ist $\psi(r,\alpha) = -\infty$, da $\left(\dfrac{r^{n+2} - kr^2}{\alpha^{n+2} - k\alpha^2}\right)_{r=\alpha} = 1$ ist.

Für $r = \infty$ wird $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{\dfrac{r^{2+n} - kr^2}{\alpha^{n+2} - k\alpha^2} - 1}}$ unendlich klein, das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t(t^n - 1)dt}{\left(\sqrt{t^2 \cdot \dfrac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}\right)^3}$ konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert, da der Integrand für $t = \infty$ so stark verschwindet wie $t^{n+1}/t^{\frac{3}{2}(n+2)} = 1/t^{\frac{n}{2}+2}$. Bezeichne ich den Wert

$$\frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n - k)^2}\int_1^{\infty} \frac{t(t^n-1)dt}{\left(\sqrt{t^2\frac{t^n\alpha^n - k}{\alpha^n - k}} - 1\right)^3}$$

mit Λ, so folgt: Λ ist eine positive Grösse, $\psi(\infty,\alpha)$ ist $= \Lambda$.

Für $\alpha \leqq r \leqq \infty$ steigt $\psi(r,a)$ monoton von $-\infty$ bis Λ. Ebenso steigt für $\alpha \leqq c \leqq \infty$ als Funktion von c die Grösse $\psi(c,\alpha)$ von $-\infty$ bis Λ.

Die Gleichung 4′) hat also nur dann eine Wurzel r, wenn $\psi(r,\alpha) = -\psi(c,\alpha) < \Lambda$, $\psi(c,\alpha) > -\Lambda$, sonst nicht.

Bezeichne ich die Wurzel der Gleichung $\psi(c,\alpha) = -\Lambda$ mit der Unbekannten c — es existiert auf Grund der erwiesenen Eigenschaft von $\psi(c,\alpha)$ stets eine einzige — mit λ, so folgt:

Es existiert dann und nur dann genau eine Wurzel r der Gleichung $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0$, wenn $c \geqq \lambda$ ist.

Für $c = \lambda$ wird $\psi(c,\alpha) = -\Lambda$, $\psi(r,\alpha) = +\Lambda$, $r = +\infty$, für $c = \infty$ wird $\psi(c,\alpha) = +\Lambda$, $\psi(r,\alpha) = -\Lambda$, $r = \lambda$.

Wenn c von λ bis ∞ wächst, fällt r von ∞ bis λ.

Dem Werte $c = \lambda$ entsprechen zwei zur Geraden $\varphi = \varphi_0$ symmetrische Punkte R und R', die von O um λ entfernt sind, und wenn wir noch bedenken, dass konjugierte Punkte auf verschiedenen Hälften der Kurve liegen, erhalten wir dasselbe Resultat wie in § 2, § 4, § 5 (Figur 3):

Zu keinem Punkte des Bogens RR' gibt es einen konjugierten, zu jedem anderen Punkte der Kurve genau einen.

Bewegt sich P auf der oberen Hälfte von ∞ bis R, so wandert der konjugierte Punkt auf der unteren von R' bis ∞. Die Bewegung ist beschränkt stabil [1]).

Das Franksche Kriterium ist nicht anwendbar. Damit nämlich die Bewegung stabil ist, muss die kinetische Krümmung längs der ganzen Kurve über einer festen positiven Zahl liegen, die nicht $= 0$ sein darf.

Hier ist $K(x,y) = \frac{n^2kr^{n-2}}{2(r^n - k)^3}$, also stets positiv. Aber längs einer Bahnkurve bewegt sich r im Intervalle $\alpha \leqq r \leqq \infty$,

[1]) Thomson and Tait, T. o. n. ph., art. 354.

daher kommt $K(x,y)$ für grosses r der 0 beliebig nahe und besitzt keine von 0 verschiedene positive untere Grenze.

Der Fall $n = -1$ führt zur Planetenellipse und ergibt oszillierende Stabilität, § 3. Es ist $K(x,y) = \frac{k}{2(1-kr)^3}$.

Es sei β die halbe kleine Achse der Ellipse, dann ist, da die grosse Achse $= 1/k$ ist, da ferner O zugleich ein Brennpunkt der Ellipse ist,

$$\frac{1}{2k} - \sqrt{\frac{1}{4k^2} - \beta^2} \leqq r \leqq \frac{1}{2k} + \sqrt{\frac{1}{4k^2} - \beta^2},$$

daher ist längs der Kurve $K \geqq \frac{4k}{(1+\sqrt{1-4k^2\beta^2})^3}$, $K(x,y)$ besitzt eine positive von 0 verschiedene untere Grenze, die Bewegung ist daher auch nach dem Frankschen Kriterium oszillierend stabil.

Der Fall $n=-2$ ergibt beschränkte Stabilität, § 1, pg. 4 bis 7. Es ist längs der Bahnkurve $0 \leqq r \leqq \frac{m}{\sqrt{k(m^2+1)}}$, $K = \frac{4kr^2}{2(1-kr^2)^3}$, K ist zwar positiv, kommt aber für kleines r der 0 beliebig nahe, mithin ist das Kriterium von Frank nicht anwendbar.

B.) $n < -2$.

Auch hier liefert das Franksche Kriterium keine Entscheidung. Setze ich $n = -m-2$, so ist $m > 0$,

$$K(x,y) = \frac{(m+2)^2 k r^{2m+2}}{2(1-kr^{m+2})^3};$$

längs der Kurve ist aber (pag. 34) $0 \leqq r \leqq \alpha$, mithin ist K zwar beständig positiv, aber es ist $\lim_{r=0} K = 0$.

Die Gleichung der Bahnkurve lautet (§ 11 B)

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^\alpha \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{m+2} - r^2 k - a^2}},$$

da $r^{m+2} - r^2 \geqq a^2$ sein muss, damit $\sqrt{r^{m+2} - r^2 k - a^2}$ reell ist, so ist stets $r^{m+2} - r^2 > 0$; daraus folgt genau wie im ersten Teile dieses Paragraphen, dass ein zu dem Punkte $P(c,\varphi_1)$ konjugierter Punkt Q auf derselben Hälfte der Bahnkurve nicht liegen kann.

Wenn Q auf der anderen Hälfte der Kurve liegen soll, so ergibt sich für ihn die Gleichung

$$(4'.)\quad \psi(r,\alpha)+\psi(c,a)=0.$$

Es ist dabei

$$\psi(r,\alpha)=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_r^\alpha \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_\alpha^r \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^n\alpha^n-k}{\alpha^n-k}\,t^2-1}},$$

$r=\alpha t$, $a^2=\alpha^{n+2}-k\alpha^2$ gesetzt. Es folgt weiter

$$\psi(r,\alpha)=-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^{n+2}-kr^2}{\alpha^{n+2}-k\alpha^2}-1}}+$$

$$\frac{k\alpha^{m+1}(m+2)}{2(1-k\alpha^{m+2})^2}\int_\alpha^r \frac{dt\left(\frac{1}{t^{m+1}}-t\right)}{\left(\sqrt{\frac{t^{-m}-kt^2\alpha^{m+2}}{1-k\alpha^{m+2}}}-1\right)^3},$$

wobei $m=-(n+2)$, $m>0$.

Da $r/\alpha \leqq 1$, so ist die Variable $t\leqq 1$, $1/t^{m+1}-t\geqq 0$. Lasse ich r gegen 0 konvergieren, so wird $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^{n+2}-kr^2}{\alpha^{n+2}-k\alpha^2}-1}}$ sehr klein, da $r^{n+2}=1/r^m=\infty$ wird,

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt\left(\frac{1}{t^{m+1}}-t\right)}{\left(\sqrt{\frac{t^{-m}-kt^2\alpha^{m+2}}{1-k\alpha^{m+2}}}-1\right)^3}$ konvergiert gegen einen positiven endlichen Grenzwert, da der Integrand für $t=0$ endlich bleibt oder für $m=1$ unendlich wird wie $1/\sqrt{t}$. Ich setze $\dfrac{k(m+2)\alpha^{m+1}}{2(1-k\alpha^{m+2})^2}\displaystyle\int_0^1=\Lambda$, dann ist Λ endlich und >0, und es ist $\psi(0,\alpha)=\Lambda$.

Für $r=\alpha$ ist der erste Bestandteil von $\psi(r,\alpha)=-\infty$, der zweite $=0$. Es ist ferner

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\left(\frac{1}{r^{m+1}}-kr\right)(m+2k\alpha^{m+2})\alpha^{m-1}}{2\left(\sqrt{\frac{r^{-m}-kr^2}{\alpha^{-m}-k\alpha^2}}-1\right)^3(1-k\alpha^{m+2})^2}.$$

Da $m > 0$, $\alpha > 0$, da ferner $1/r^m - kr^2 \geqq a^2$, so ist auch $1/r^{m+1} - kr > 0$ und $\partial\psi/\partial r < 0$, ψ ist eine monoton fallende Funktion von r.

Wenn r von α bis 0 fällt, so wächst $\psi(r,\alpha)$ von $-\infty$ bis A. Wenn c von α bis 0 fällt, so steigt $\psi(c,\alpha)$ als Funktion von c von $-\infty$ bis A.

Da diese Eigenschaften sich mit denen der Funktion $\psi(r,\alpha)$ aus § 15 A völlig decken, nur dass an die Stelle des Intervalles $\alpha \leqq r \leqq \infty$ hier das Intervall $\alpha \geqq r \geqq 0$ tritt, so sind auch die weiteren Ueberlegungen ähnlich und ebenso das Resultat:

Zu keinem Punkte der Kurvenstrecke $R\alpha R'$ gibt es einen konjugierten, zu jedem anderen Kurvenpunkte genau einen.

Bewegt sich P auf der oberen Hälfte von O bis R, so wandert der konjugierte Punkt auf der unteren von R' bis O. Die Bewegung ist beschränkt stabil.

Figur 13 gibt das Bild der Bahnkurve für $n = -4$, $\alpha = 10$, $k = tg^2 40^0/10000$. Die Gleichung der Kurve ist $r = \alpha\, cn\left(\varphi - \varphi_0/\sqrt{\cos 80^0}\right)$. Die Lage der Punkte R, R' ist nur ungefähr angedeutet.

§ 16. $\varepsilon = -1$, $U = -r^n$, $h > 0$.

A. $n < 0$, § 12A.

Wie in § 15A ergibt sich, dass auf der Kurvenhälfte, auf der P bereits liegt, kein zu P konjugierter Punkt vorhanden sein kann; denn die Gleichung einer Bahnkurve lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_\alpha^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}},$$

es muss $r^2h - r^{n+2} \geqq a^2$, d. h. $r^2h - r^{n+2} > 0$ sein, also besitzt die Gleichung 4.) $\int_c^r \frac{(r^2h - r^{n+2})\,dr}{r\left(\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}\right)^3} = 0$ keine von $r = c$, $\varphi = \varphi_1$ verschiedene Lösung. Gleichung 4′.) lautet

4′.) $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0$, wobei

$$\psi(r,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\alpha}^{r}\frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}} =$$

$$-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^2h-r^{n+2}}{\alpha^2h-\alpha^{n+2}}-1}} + \frac{h\alpha^{n-1}}{2(h-\alpha^n)^2}\int_{1}^{\frac{r}{\alpha}}\frac{dt\,.\,t\,.\,n(t^n-1)}{\left(\sqrt{t^2\,.\,\frac{h-t^n\,\alpha^n}{h-\alpha^n}-1}\right)^3}\,.$$

Da $t \geqq 1$, $n < 0$, so ist $n(t^n - 1) \geqq 0$, mithin ist der zweite Bestandteil von $\psi(r,\alpha)$,

$$\frac{h\alpha^{n-1}}{2(h-\alpha^n)^2}\int_{1}^{\frac{r}{\alpha}}\frac{dt\,.\,t\,.\,n(t^n-1)}{\left(\sqrt{t^2\,.\,\frac{h-(\alpha t)^n}{h-\alpha^n}-1}\right)^3}$$

positiv; ferner konvergiert

$$\frac{h\alpha^{n-1}}{2(h-\alpha^n)^2}\int_{1}^{\infty}\frac{dt\,.\,t\,.\,n(t^n-1)}{\left(\sqrt{t^2\,.\,\frac{h-(\alpha t)^n}{h-\alpha^n}-1}\right)^3}$$

gegen eine positive feste endliche Zahl Λ. Es ist ferner

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{r(h-r^n)[2h-(n+2)\alpha^n]}{2\alpha^3(h-\alpha^n)^2\left(\sqrt{\frac{r^2h-r^{n+2}}{\alpha^2h-\alpha^{n+2}}-1}\right)^3} \geqq 0,$$

denn es ist $r^2h-r^{n+2} > 0$, $h-r^n > 0$ und $h > \alpha^n$, also erst recht $2h-(n+2)\alpha^n > 0$.

Die hier definierte Funktion $\psi(r,\alpha)$ hat daher genau dieselben Eigenschaften wie die in § 15A aufgestellte. Da auch dort die Bahnkurven annähernd Hyperbelgestalt haben, so ist das Resultat wörtlich dasselbe. In den Fällen $n=-2$, § 2, und $n=-1$, § 4 hatte ich dieses Resultat bereits erhalten.

Die kinetische Krümmung ist $K(x,y) = \frac{hn^2r^{n-2}}{2(h-r^n)^3}$. Dabei ist n negativ.

K ist daher zwar positiv, wird aber mit unendlich wachsendem r beliebig klein, daher liefert Franks Kriterium keine Entscheidung.

B. $n > 0$ (§ 12 B).

Die Gleichung der Bahnkurve ist

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Es seien α und β die beiden reellen positiven Wurzeln der Gleichung $r^2 h - r^{n+2} = a^2$, $\alpha < \beta$. Es sei ferner

$$K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Ich bezeichne als Teil I, II, III u. s. f. der Kurve die Teile, für welche

$$0 \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq K, \text{ bezw.}$$
$$K \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq 2K,$$
$$2K \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq 3K, \text{ u.s.f.}$$

Entsprechend bezeichne ich mit

I′ den Teil $0 \geqq \varphi - \varphi_0 \geqq -K$, mit
II′ den Teil $-K \geqq \varphi - \varphi_0 \geqq -2K$, mit
III′ den Teil $-2K \geqq \varphi - \varphi_0 \geqq -3K$, u.s.f.

Dann ist Teil I kongruent zu III, V, VII, IX...und II′, IV′, VI′, VIII′..., Teil I′ zu II, IV, VI...und III′, V′, VII′... Teil I ist symmetrisch zu I′. Die Gleichung von Teil I lautet

$$\text{I.)}\ \varphi - \varphi_0 = \int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}, \text{ von}$$

$$\text{I′.)}\varphi - \varphi_0 = -\int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}, \text{ von}$$

$$\text{II.)}\varphi-\varphi_0 = K+\int_r^{\beta}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}},\quad \text{von}$$

$$\text{II}'.)\varphi-\varphi_0=-K-\int_r^{\beta}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}},\quad \text{von}$$

$$\text{III.)}\ \varphi-\varphi_0=2K+\int_{\alpha}^{r}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}},\quad \text{von}$$

$$\text{III}'.)\varphi-\varphi_0=-\ 2K-\int_{\alpha}^{r}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}},\ \text{u.s.f.}$$

Man erhält das vollständige Bild der Kurve, indem man in O einen Winkelspiegel von dem Oeffnungswinkel K aufstellt, dort den Teil I hineinlegt und den Teil mit seinen sämtlichen Spiegelbildern betrachtet.

Ich lege jetzt auf Teil I den festen Punkt $P(c,\varphi_1)$. Dann ist

$$\text{Ia.)}\varphi_1-\varphi_0=\int_{\alpha}^{c}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}\ .$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von Gleichung I.) erhalte ich

$$\text{1.)}\ \varphi-\varphi_1=\int_c^r\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}$$

als Gleichung der Teile I einer Kurve, auf deren Teil I P liegt.

Die Gleichung der Teile I′ derselben Kurve erhalte ich durch Subtraktion der Gleichung I′.) von Ia.)

$$\text{1}'.)\varphi_1-\varphi=\int_{\alpha}^{c}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}+\int_{\alpha}^{r}\frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}};$$

subtrahiere ich die Gleichung Ia.) von Gleichung II.), so erhalte ich als Gleichung der Teile II derselben Kurve

$$\varphi - \varphi_1 = K + \int_r^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}} - \int_\alpha^c \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}},$$

2.) $$\varphi - \varphi_1 = \int_c^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}} + \int_r^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}}$$

Auf Teil I gibt es keinen zu P konjugierten Punkt. Durch Differenzieren von Gleichung 1.) erhalte ich nämlich

3.) $$\frac{\partial}{\partial a}\int_c^r \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}} = 0, \quad \int_c^r \frac{(rh - r^{n+1})dr}{\left(\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}\right)^3} = 0;$$

diese Gleichung hat keine Lösung ausser $r=c$ (aus Gleichung 1 folgt dann $\varphi = \varphi_1$), da $r^2h - r^{n+2} \geqq a^2$, mithin $rh - r^{n+1}$ und der ganze Integrand positiv ist.

Auf Teil I′ gibt es einen zu P konjugierten Punkt. Durch Differenzieren von Gleichung 1′.) folgt

3′.) $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0$, wenn

$$\psi(r,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_\alpha^r \frac{adr}{r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2}} \quad \text{gesetzt wird.}$$

Ich substituiere $r = \alpha t$, $a^2 = \alpha^2 h - \alpha^{n+2}$, dann ist, da $\alpha \leqq r \leqq \beta$, stets $1 \leqq t \leqq \beta/\alpha$,

4.) $$\psi(r,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2\frac{h - t^n\alpha^n}{h - \alpha^n} - 1}}.$$

Das Differenzieren nach dem Parameter α unter dem Integralzeichen ist auf Grund des § 13 gestattet. Die Funktion $t^2(h - t^n\alpha^n)$ ist positiv im Intervall $0 \leqq t^n \leqq h/\alpha^n$. Ihre Ableitung ist $t(2h - (n+2)t^n\alpha^n)$. Daher steigt sie für $0 < t^n < 2h/\alpha^n(n+2)$ beständig von 0 bis zu einem Maximalwerte, für $2h/(n+2)\alpha^n < t^n < h/\alpha^n$ fällt sie von dem Maximalwerte bis 0 und wird dann negativ (Figur 14).

Sie nimmt darum jeden Wert, den sie im Intervalle $0 < t < \sqrt[n]{\frac{2h}{\alpha^n(n+2)}}$ hat, noch genau einmal im Intervalle $\sqrt[n]{\frac{2h}{\alpha^n(n+2)}} < t < \sqrt[n]{\frac{h}{\alpha^n}}$ an, also jeden Wert im Intervalle $0 < t < \sqrt[n]{\frac{h}{\alpha^n}}$ höchstens zweimal.

Es ist $\beta^2 h - \beta^{n+2} = a^2$, folglich $\beta^n < h$, $(\beta/\alpha)^n < h/\alpha^n$; ferner ist $\alpha^n < h$, da $\alpha^2 h - \alpha^{n+2} = a^2 > 0$.

Folglich liegen die Stellen $t = 1$ und $t = \beta/\alpha$ in dem Intervalle $0 < t < \frac{\sqrt[n]{h}}{\alpha}$; an beiden Stellen ist die Funktion $t^2 h - t^{n+2} . \alpha^n = h - \alpha^n$, daher ist die Funktion

5.) $t^2 . \frac{h - t^n \alpha^n}{h - \alpha^n} - 1$ an allen Stellen des Intervalls $1 < t < \beta/\alpha$ von 0 verschieden und verschwindet nur an den Grenzen. Ferner sind die beiden Nullstellen der Funktion 5), $t = 1$ und $t = \beta/\alpha$, einfache Nullstellen.

Die Funktion $f(t,\alpha) = \frac{1}{t\sqrt{t^2 . \frac{h - t^n \alpha^n}{h - \alpha^n} - 1}}$ ist daher im Intervalle $1 \leqq t \leqq r/\alpha$, solange $r < \beta$ ist, eine stetige Funktion des Variablenpaares t,α mit Ausnahme der Stelle $t = 1$. Dort ist aber $f(t,\alpha)\ \sqrt{t-1}$ stetig. Ebenso ist $\sqrt{t-1}\ \partial f/\partial \alpha$ für $1 \leqq t \leqq r/\alpha$ stetig; denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{t(t^n - 1)}{\left(\sqrt{t^2 \frac{h - t^n \alpha^n}{h - \alpha^n} - 1}\right)^3} \cdot \frac{hn\alpha^{n-1}}{2(h - \alpha^n)^2},$$

der Zähler ist durch $t-1$, der Nenner durch $(\sqrt{t-1})^3$ teilbar, $\sqrt{t-1}\ \partial f/\partial \alpha$ ist für $t = 1$ stetig. Daher erhalte ich auf Grund von § 13

$$6.)\psi(r,c)=-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^2(h-r^n)}{\alpha^2(h-\alpha^n)}-1}}+\frac{hn\alpha^{n-1}}{2(h-\alpha^n)^2}\int_1^{\frac{r}{\alpha}}\frac{dt.t(t^n-1)}{\left(\sqrt{t^2\frac{h-t^n\alpha^n}{h-\alpha^n}-1}\right)^3}$$

Für $r=\alpha$ wird der erste Teil dieses Ausdrucks $=-\infty$, der zweite $=0$. Die Funktion

$$6'.)\quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{r(h-r^n)[2h-(n+2)\alpha^n]}{2\alpha^3(h-\alpha^n)^2\left(\sqrt{\frac{r^2h-r^{n+2}}{\alpha^2h-\alpha^{n+2}}}-1\right)^3}$$

ist stets positiv. Da α die kleinere positive Nullstelle der Funktion $r^2h-r^{n+2}-a^2$ ist, so liegt α vor dem Maximum der Funktion r^2h-r^{n+2}, es ist daher $\alpha^n<2h/(n+2)$, $2h-(n+2)\alpha^n>0$; ebenso ist $r(h-r^n)$ positiv, da $r^2(h-r^n)\geqq a^2>0$ ist.

$\psi(r,\alpha)$ ist eine monoton wachsende Funktion von r. Ich integriere die Gleichung 6′.

$$\psi(r,\alpha)=g(\alpha)+\int_{r_0}^{r}\frac{rdr(h-r^n)}{\left(\sqrt{\frac{r^2h-r^{n+2}}{\alpha^2h-\alpha^{n+2}}}-1\right)^3}\cdot\frac{2h-(n+2)\alpha^n}{2\alpha^3(h-\alpha^n)^2}.$$

$g(\alpha)$ ist eine unbekannte Funktion von α. r bewegt sich von α bis β. Lasse ich r bis β wachsen, so wird

$\int_{r_0}^{\beta}\frac{rdr(h-r^n)}{\left(\sqrt{\frac{r^2h-r^{n+2}}{\alpha^2h-\alpha^{n+2}}}-1\right)^3}$ unendlich gross; denn $\beta^2h-\beta^{n+2}$ ist $=a^2=\alpha^2h-\alpha^{n+2}$, der Nenner des Integranden ist durch $(\sqrt{\beta-r})^3$ teilbar, der Zähler ist für $r=\beta$ von 0 verschieden.

Wenn r von α bis β wächst, steigt $\psi(r,\alpha)$ von $-\infty$ bis $+\infty$; wenn c von α bis β geht, steigt $\psi(c,\alpha)$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Gleichung

$$3'.)\ \psi(r,\alpha)+\psi(c,\alpha)=0$$

hat daher stets genau eine Wurzel r zwischen α und β.

Wenn c von α bis β wächst, so geht $\psi(c,\alpha)$ von $-\infty$ bis $+\infty$, daher $\psi(r,\alpha)$ von $+\infty$ bis $-\infty$, r fällt von β bis α.

Zu jedem Punkte von Teil I ist ein konjugierter auf I′ vorhanden. Bewegt sich P auf I von A bis B, so wandert der konjugierte Punkt auf I′ von B′ bis A, Figur 15. — Wie bewegt sich der zu P auf Teil II konjugierte Punkt?

Die Gleichung der Teile II aller Kurven, auf deren Teil I der Punkt $P(c,\varphi_1)$ liegt, lautet

$$2.)\ \varphi-\varphi_1=\int_c^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}+\int_r^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}.$$

Für den zu P auf II konjugierten Punkt besteht die Gleichung

$$7.)\ \chi(r,\beta)+\chi(c,\beta)=0,\quad \text{wobei}$$

$$\chi(r,\beta)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\int_r^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}},$$

$$\chi(c,\beta)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\int_c^\beta \frac{adr}{r\sqrt{r^2h-r^{n+2}-a^2}}\quad \text{gesetzt ist.}$$

Es ist $\beta^2h-\beta^{n+2}=a^2$. Ich substituiere $\beta t=r$; da längs der Bahnkurve $\alpha\leqq r\leqq\beta$, so ist $\alpha/\beta\leqq t\leqq 1$. Es ist

$$\chi(r,\beta)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{\frac{r}{\beta}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{t^2\dfrac{h-t^n\beta^n}{h-\beta^n}-1}}.$$

Es lässt sich auch hier leicht zeigen, dass die Funktion $t^2(h-t^n\beta^n)/(h-\beta^n)-1$ im Intervalle $\alpha/\beta\leqq t\leqq 1$ nur die beiden einfachen Nullstellen $t=\alpha/\beta$ und $t=1$ besitzt.

Genau wie pag. 51 folgt daraus, dass bei dem Integral $\displaystyle\int_{\frac{r}{\beta}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{t^2\dfrac{h-t^n\beta^n}{h-\beta^n}-1}}$ das Differenzieren nach dem

Parameter β unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf, solange $\alpha < r \leqq \beta$ ist.

Ich erhalte

$$8.)\quad \chi(r,\beta) = -\frac{1}{\beta\sqrt{-\frac{r^2h - r^{n+2}}{\beta^2h - \beta^{n+2}}} - 1} + \frac{hn\beta^{n-1}}{2(h-\beta^n)^2}\int_{\frac{r}{\beta}}^{1} \frac{tdt(t^n-1)}{\left(\sqrt{t^2\frac{h-t^n\beta^n}{h-\beta^n}}-1\right)^3}.$$

Für $r = \beta$ ist $(r^2h - r^{n+2})/(\beta^2h - \beta^{n+2}) = 1$, $\chi(r,\beta) = -\infty$.

Ganz ähnlich wie bei der Funktion $\psi(r,\alpha)$ erhält man als Eigenschaften der Funktion $\chi(r,\beta)$:

Wenn r von β bis α fällt, steigt $\chi(r,\beta)$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Wenn c von β bis α fällt, steigt $\chi(c,\beta)$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Daher besitzt die Gleichung

$$7.)\quad \chi(r,\beta) + \chi(c,\beta) = 0$$

stets genau eine Lösung r.

Wenn c von α bis β steigt, fällt r von β bis α, d. h. wenn Punkt P auf Teil I von A bis B wandert, so geht der konjugierte Punkt auf Teil II von B bis C (Figur 16).

Berücksichtige ich noch, dass entsprechende Teile zu einander kongruent sind, dass sich also der Teil I′ zum Teile I und zu II verhält geradeso wie II zu III und IV, u. s. f., so folgt:

Auf dem Kurventeile $mK \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq (m+1)K$ ist zu einem Punkte sowohl nach rechts wie nach links auf jedem der beiden benachbarten Kurventeile genau ein konjugierter Punkt vorhanden. Wenn der Punkt von einem Perizentrum ($r = \alpha$) zu einem Apozentrum wandert, so wandert der konjugierte von einem Apozentrum ($r = \beta$) in derselben Richtung bis zum nächsten Perizentrum.

Die Bewegung ist oszillierend stabil. Dies folgt auch aus dem Frankschen Kriterium: Die Bewegung ist oszillierend stabil, wenn die Bahnkurve nirgends die Grenzkurve $U+h=0$ trifft und wenn längs der Bahnkurve die kinetische Krümmung

beständig über einer positiven von 0 verschiedenen Zahl liegt. Hier ist $K(x,y) = hn^2r^{n-2}/2(h-r^n)^3$, $\alpha \leqq r \leqq \beta$, also für $n > 1$: $K(x,y) \geqq hn^2\alpha^{n-2}/2(h-\alpha^n)^3 > 0$.

Es ist ferner $U + h = h - r^n$ stets > 0.

Für $n = 1$ ist der kleinste Wert, den K im Intervalle $0 < r < h$, welches das Intervall $\alpha \leqq r \leqq \beta$ umfasst, annimmt, $= 128/27h^3 > 0$.

Diese Gruppe, $U = -r^n$, $n > 0$, ist, abgesehen von dem Falle $U = +1/r$, $h < 0$ die einzige von allen hier behandelten, bei der oszillierende Stabilität auftritt.

§ 17. Die Bewegung in einer Kreisbahn.

Ich habe der Kürze wegen bei der Untersuchung der konjugierten Punkte alle die Fälle, in denen der Integrationskonstanten spezielle Werte gegeben sind, insbesondere den Fall einer kreisförmigen Bahn, nicht behandelt. Das soll jetzt geschehen.

Den Fall $a = 0$, der überall geradlinige Bewegungen ergibt, lasse ich unerörtert.

A.) $n + 2 < 0$.

$n + 2 = -m$. Damit die Bewegung in einer Kreisbahn erfolgt, muss die wirkende Kraft eine anziehende sein, daher hier $U = +r^n = 1/r^{m+2}$.

Der Radius der Bahn sei c. M sei die Masse, v die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, dann ist $Mv^2/2 = U + h = h + 1/c^{m+2}$. Die Grösse der Zentrifugalkraft ist $= Mv^2/c = 2h/c + 2/c^{m+3}$. Diese muss durch die wirkende Kraft $\partial U/\partial r = -(m+2)/r^{m+3}$ ausgeglichen werden, es folgt daher $(m+2)/c^{m+3} = 2h/c + 2/c^{m+3}$, $c = \sqrt[m+2]{m/2h}$. Man erhält diesen speziellen Fall aus dem allgemeinen $U = +r^n$, $n < -2$, $h > 0$, § 9 C, indem man für a den speziellen Wert $\sqrt{\mu}$ nimmt. Dort ist das Auftreten der Kreisbahn erwähnt (pag. 32).

Ich lege auf den Kreis einen festen Punkt $P(c,\varphi_1)$ und bestimme den eventuell auftretenden konjugierten Punkt; zu diesem Zwecke lege ich durch den Punkt P des Kreises eine benachbarte Kurve.

Die Bahnkurven von § 9 C 2 kommen hierfür nicht in Betracht, da sie beide den Kreis $r = c = \sqrt[m+2]{m/2h}$ überhaupt nicht schneiden; denn sie liegen entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb dieses Kreises. Es sind hier nur die Kurven $a^2 < \mu$, § 9 C 1, zulässig.

Ich lege also durch P eine sehr nahe dem Kreis liegende solche Kurve $a^2 < \mu$,

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^c \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Längs der Kurve behält $\sqrt{r^2h + 1/r^m - a^2}$ ein bestimmtes Vorzeichen, da eine reelle positive Wurzel der Gleichung $r^2h + 1/r^m - a^2 = 0$ dort nicht existiert. Da die Kurve durch den Punkt P gehen soll, ist

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_0^c \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}, \quad \varphi - \varphi_1 = \int_c^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2h + \frac{1}{r^m} - a^2}}.$$

Diese Kurve kann aber den Kreis $r = c$ ausser im Punkte $P(c,\varphi_1)$ nicht mehr schneiden, da $dr/d\varphi = r\sqrt{r^2h + 1/r^m - a^2}/a$ ein festes Vorzeichen hat, r daher mit wachsendem φ beständig zunimmt, die Kurve sich also auf jeden Fall von dem Kreise immer weiter entfernt.

B.) $n = -2$.

Es sei c der Radius der Kreisbahn, dann ist auf ihr $Mv^2/2 = U + h = h + 1/c^2$. Die Zentrifugalkraft ist einerseits $= Mv^2/c$, andererseits $= -\partial U/\partial r = 2c^{-3}$. Daher folgt die Gleichung $2h + 2/c^2 = 2/c^2$, $h = 0$. Also kann im Falle $U = r^{-2}$, $h = 0$ jeder Kreis, der O zum Mittelpunkte hat, Bahnkurve sein.

Die Differentialgleichung der allgemeinen Bahnkurve lautet in diesem Falle $d\varphi\sqrt{1 - a^2} = a\,dr/r$. Setze ich $a = 1$, so folgt $dr = 0$, also ist die Bahn ein Kreis. So ergibt sich die Kreisbahn aus der allgemeinen Bahnkurve.

Ich lege jetzt durch den Punkt $P(c,\varphi_1)$ eine dem Kreise sehr nahe Bahnkurve, ich wähle also a nahe an 1. Dann ist $m = \sqrt{1-a^2}/a$ eine kleine Grösse, die benachbarte Bahnkurve ist die logarithmische Spirale $r = e^{m(\varphi-\varphi_0)}$.

Diese kann aber den Kreis nur in einem Punkte, in P, schneiden, daher ist die Bewegung nicht stabil. Fasse ich die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt:

Für $n \leqq -2$ ist die Kreisbewegung nicht stabil.

Setze ich $n = \nu + 1$, so ist die wirkende Kraft proportional r^ν, die Bewegung ist für $\nu \leqq -3$ nicht stabil.

C.) $n + 2 > 0$.

Für $n = -1$ erhalte ich die Kreisbahn als speziellen Fall der Planetenbahn-Ellipse, deren zweiter Brennpunkt nach O gerückt ist.

Da dort konjugierte Punkte auf einer Sehne durch den zweiten Brennpunkt liegen, so folgt hier:

Konjugierte Punkte liegen auf einem Durchmesser, sind also gerade durch den Bogen π getrennt.

Im Falle $n = 0$ gibt es keine kreisförmige Bewegung.

Ich betrachte jetzt den Fall $n > 0$. Die wirkende Kraft muss eine anziehende sein, $U = -r^n$. Es sei c der Radius der Bahn, dann ergibt sich die Gleichung

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=c} = \frac{Mv^2}{c} = \frac{2(h-c^n)}{c}, \quad nc^n = 2(h-c^n), \quad c = \sqrt[n]{\frac{2h}{n+2}}.$$

Man erhält diesen Fall aus dem allgemeinen $U = -r^n$, $n > 0$, § 12 B, indem man a^2 gleich dem Maximum der Funktion $hr^2 - r^{n+2}$ wählt. Dann besitzt die Funktion $hr^2 - r^{n+2} - a^2$ genau eine doppelte Nullstelle $c = \sqrt[n]{2h/(n+2)}$ und ist stets negativ ausser für $r = c$.

Die Kurve $r = c$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{adr}{d\varphi} = r\sqrt{r^2h - r^{n+2} - a^2} \equiv 0.$$

Für sie ist in der Bezeichnungsweise von § 12B: $\alpha = \beta = c$. Ich lege jetzt durch den Punkt $P(c,\varphi_1)$ eine dem Kreise benachbarte Bahnkurve. Dann folgt aus der Gestalt der

Bahnkurve, dass diese benachbarte Kurve ungefähr das Aussehen einer auf den Kreis $r = c$ aufgesetzten Sinuslinie hat[1]). Ihre Gleichung lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Ich lege durch P den Teil I der benachbarten Kurve, dann ist $\varphi_1 - \varphi_0 = \int_{\alpha}^{c} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}$. Die Gleichung der Teile I′ und II dieser Kurve ist

1.) $$\varphi_1 - \varphi = \int_{\alpha}^{c} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}} + \int_{\alpha}^{r} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}},$$

2.) $$\varphi - \varphi_1 = \int_{c}^{\beta} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}} + \int_{r}^{\beta} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}},$$

pag. 49 und 50.

Für die Schnittpunkte der benachbarten Kurve mit dem Kreise $r = c$ muss $r = c$ sein, also erhalte ich für die Winkel um welche die zu P konjugierten Punkte nach rechts bezw. links entfernt sind

$$\vartheta = 2 \int_{\alpha}^{c} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}} \quad \text{bezw.} \quad \vartheta' = 2 \int_{c}^{\beta} \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Lasse ich die benachbarte Kurve unendlich nahe an den Kreis herankommen, dann rücken α und β unendlich nahe an c heran. Ich führe den Grenzübergang aus und erhalte unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\alpha^2 h - \alpha^{n+2} = a^2, \quad \beta^2 h - \beta^{n+2} = a^2$$

nach einiger Rechnung

$$\lim_{\alpha = c} \vartheta = \lim_{\beta = c} \vartheta' = \frac{\pi}{\sqrt{n+2}}.$$

[1]) Thomson and Tait, T. o. n. ph., art. 350.

Auf dem Kreise ist zu jedem Punkte ein konjugierter nach rechts und nach links vorhanden; der Abstand zweier konjugierter Punkte, im Bogenmass gemessen, ist $= \pi/\sqrt{n+2}$. Im Falle $n = -1$ war der Abstand $= \pi = \pi/\sqrt{-1+2}$.

Setze ich $n = \nu + 1$, so erhalte ich schliesslich:

Wenn die wirkende Kraft proportional ist r^ν, wobei ν eine beliebige ganze Zahl ist, die von -1 verschieden ist, so ist die Bewegung des Punktes in einer Kreisbahn oszillierend nicht stabil für $\nu \leqq -3$, stabil für $\nu > -3$. Der Abstand zweier konjugierter Punkte auf dem Kreise ist $\pi/\sqrt{\nu+3}$[1]).

Der Fall $\nu = -1$ ist darum nicht in dem Resultat enthalten, weil dann das Potential $U = \pm \ln r$ ist.

Kapitel 4.

Die Enveloppen der Extremalen, die durch einen Punkt gehen.

Da Enveloppen nur dort auftreten, wo konjugierte Punkte vorhanden sind, kommen für die Untersuchung nur folgende Fälle in Betracht:

$$U = +r^n, \; h < 0. \quad U = -r^n, \; h > 0.$$

§ 18. Allgemeines.

Es liegt ein fester Punkt P vor mit den Koordinaten $r = c$ und $\varphi = \varphi_1$. Durch ihn lege ich eine Extremale, die durch den Parameter α bestimmt sei. Dann ergeben sich für den zu P auf der Kurve konjugierten Punkt zwei Gleichungen, die eine ist die Gleichung der Bahnkurve,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I a.}) & \varphi = \varphi(r,\alpha) \\ \text{I b.}) & f(r,\alpha) = 0 \end{array}\right\} \text{I.})$$

$f(r,\alpha)$ ist gleich der Summe der beiden Funktionen, die ich mit $\psi(r,\alpha)$ bezw. $\psi(c,\alpha)$ benannt hatte.

[1]) Thomson and Tait, T. o. n. ph., art. 350.

Um die Gleichung der Enveloppe aller durch P gehenden Extremalen zu erhalten, muss ich α aus den beiden Gleichungen I.) eliminieren. Zur Diskussion der Enveloppe müssen nun folgende Fragen entschieden werden.

1.) In welchem Intervalle bewegt sich α, r, φ?

2.) Es sei von α das reelle Intervall $A \leqq \alpha \leqq B$, von r $r_0 \leqq r \leqq r_1$. Lässt sich die Elimination von α aus den Gleichungen Ia.) und Ib.) vollziehen, d. h. ist auf Grund von Gleichung Ib.) α eine reguläre analytische Funktion von r im Inneren des Intervalles? Das ist dann der Fall auf Grund eines Theorems über implicite Funktionen, wenn für

$$A \leqq \alpha \leqq B,\ r_0 \leqq r \leqq r_1$$

$f(r,\alpha)$ eine reguläre analytische Funktion von r,α ist und $\partial f/\partial\alpha \gtrless 0$.

3.) Behält überall längs der Enveloppe der Enveloppensatz[1]), welcher die Eigenschaft der Enveloppe geodätischer Linien auf die Extremalen eines allgemeinen Variationsproblems überträgt, seine Gültigkeit? Gibt es ferner auf der Enveloppe Punkte von der Art, dass der Extremalenbogen, der einen solchen Punkt mit P verbindet, ein starkes Minimum des Aktionsintegrales liefert?

Es sei die Gleichung der Enveloppe in Parameterform $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$. Dann sei zur Entscheidung der Fragen 3.) darauf hingewiesen, dass der Enveloppensatz überall auf der Enveloppe seine Gültigkeit hat, wenn die Grösse $(dx/d\alpha)^2 + (dy/d\alpha)^2$ nur in einzelnen getrennten Punkten der Kurve verschwindet[1]). Nun ist

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\left[1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right].$$

kann also nur dort verschwinden, wo $dr/d\alpha$ verschwindet, und es wird sich herausstellen, dass $dr/d\alpha$ höchstens in einzelnen Punkten verschwinden kann.

Der Extremalenbogen, der einen Punkt Q der Enveloppe mit P verbindet, kann höchstens dann ein starkes Minimum

[1]) Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, deutsche Ausgabe, § 44 und Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 25.

liefern, wenn die Enveloppe in Q eine Spitze hat[1]). Dieser Fall einer Spitze wird aber nie eintreten. Es sei in der Umgebung eines Punktes der Enveloppe φ eine reguläre analytische Funktion von r, dann sind auch die Grössen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ reguläre Funktionen von r; die Enveloppe lässt sich daher in der Nähe dieses Punktes in Parameterform darstellen durch die Gleichungen $x = x(r)$ $y = y(r)$. Nun ist

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \geqq 1.$$

Eine Spitze kann also dort nicht vorliegen, da dx/dr, dy/dr auf Grund dieser Ungleichung nicht gleichzeitig verschwinden können.

Eine Spitze könnte also höchstens in solchen Enveloppenpunkten auftreten, in welchen φ aufhört eine reguläre Funktion von r zu sein.

Als gemeinsame Eigenschaft der Enveloppen ergibt sich,

1.) dass sie zu der Geraden $\varphi = \varphi_1$ symmetrisch sind,

2.) dass sie die Grenzkurve $U + h = 0$ auf dieser Geraden berühren,

3.) dass sie mit wachsendem $|\varphi - \varphi_1|$ sich beständig immer weiter vom Pole O entfernen oder aber sich ständig an O nähern, dass also ausser in dem Berührungspunkte mit der Grenzkurve keine Peri- oder Apozentra vorhanden sind.

Dies gilt jedoch nicht von dem Falle $U = -r^n$, $n > 0$. Hier konnte ich die Gestalt der Enveloppe nicht ermitteln wegen der Schwierigkeit, die das Auftreten des reellen Periodizitätsmoduls $2K$ bot. Jedoch ist im Falle $n = 2$ in § 6 die Enveloppe bereits ermittelt worden, und daher kann dieser Fall für den allgemeineren $n > 0$ bei einer weiteren Untersuchung als Wegweiser dienen.

§ 19. $U = +r^n$, $h < 0$, $h = -k$ (§ 15).

A.) $n > 0$.

Die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_a^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2} - r^2 k - a^2}}.$$

[1]) Bolza, § 47.

Die Gleichung der oberen bezw. unteren Hälfte einer Kurve, auf deren unterer bezw. oberer Hälfte der Punkt $P(c,\varphi_1)$ liegt, lautet (pg. 41)

$$\text{Ia.)}\varphi-\varphi_1=\pm\left\{\int_\alpha^r \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}+\int_\alpha^c \frac{adr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}\right\}.$$

Auf diesem Kurventeile ist der zu P konjugierte Punkt festgelegt durch die Gleichung

$$\text{I b.)}\ \psi(r,\alpha)+\psi(c,\alpha)=0.$$

Daher ergibt sich die Gleichung der Enveloppe durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen Ia.) und Ib.)

Es ist dabei zu berücksichtigen, dass $a^2=-\alpha^2k+\alpha^{n+2}$,

$$\text{IIa.)}\ \psi(r,\alpha)=-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^{n+2}-r^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}-1}}$$

$$+\frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n-k)^2}\int_1^{\frac{r}{\alpha}}\frac{t(t^n-1)dt}{\left(\sqrt{t^2\cdot\frac{t^n\alpha^n-k}{\alpha^n-k}-1}\right)^3}.$$

$$\text{IIb.)}\ \psi(c,\alpha)=-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{c^{n+2}-c^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}-1}}+$$

$$\frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n-k)^2}\int_1^{\frac{c}{\alpha}}\frac{t(t^n-1)dt}{\left(\sqrt{t^2\cdot\frac{t^n\alpha^n-k}{\alpha^n-k}-1}\right)^3}$$

(pag. 42) ist. Es ist ferner stets $a\geqq 0$, $r>0$, $\alpha>0$, ferner ist $r^n-k\geqq 0$, da $\sqrt{r^2(r^n-k)-a^2}$ reell sein muss, ebenso $\alpha^n-k\geqq 0$, da $\alpha^2(\alpha^n-k)=a^2\geqq 0$.

Wenn r von α bis ∞ steigt, so wächst $\psi(r,\alpha)$ ständig von $-\infty$ bis zur Zahl

$$\Lambda = \frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n - k)^2} \int_1^{\infty} \frac{t(t^n - 1)dt}{\left(\sqrt{t^2 \cdot \frac{t^n \alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}\right)^3}.$$

Solange $\psi(c,\alpha) + \Lambda \geqq 0$, besitzt daher die Gleichung

Ib.) $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0$

genau eine Wurzel.

Es ist α der kürzeste Abstand der Bahnkurve von O. Da der Punkt $P(c,\varphi_1)$ auf der Kurve liegt, so ist $\alpha \leqq c$.

Da andererseits alle Bahnkurven ausserhalb der Grenzkurve $r^n - k = 0$ sich befinden, so ist $\alpha \geqq \sqrt[n]{k}$. Der Parameter α geht daher von $\sqrt[n]{k}$ bis c.

Für $\sqrt[n]{k} \leqq \alpha \leqq c$ fällt $\psi(c,\alpha)$ als Funktion von α ständig von $+\infty$ bis $-\infty$, wie später noch gezeigt werden wird, ebenso ist Λ eine ständig abnehmende Funktion α, daher besitzt die Funktion $\psi(c,\alpha) + \Lambda(\alpha)$ als Funktion von α genau eine positive Nullstelle $\alpha_0 < c$ und ist positiv für $\alpha \leqq \alpha_0$.

Gleichung Ib.) besitzt daher genau eine positive Wurzel r für jeden Wert α des Intervalles $\sqrt[n]{k} \leqq \alpha \leqq \alpha_0$.

Wenn ich α an $\sqrt[n]{k}$ heranrücken lasse, so konvergiert die zugehörige Wurzel r der Gleichung Ib.) ebenfalls gegen $\sqrt[n]{k}$, $\sqrt{\frac{r^{n+2} - r^2 k}{\alpha^{n+2} - \alpha^2 k}} - 1$ gegen 0.

Es ist nämlich

$$\lim_{\alpha = \sqrt[n]{k}} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^{n+2} - c^2 k}{\alpha^{n+2} - \alpha^2 k}} - 1} = 0,$$

$$\lim_{\alpha = \sqrt[n]{k}} \frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n - k)^2} \int_1^{\frac{c}{\alpha}} \frac{t(t^n - 1)dt}{\left(\sqrt{t^2 \cdot \frac{t^n \alpha^n - k}{\alpha^n - k} - 1}\right)^3} = \infty,$$

also ist

$$\text{IIIa.)} \quad \lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} \psi(c,\alpha) = +\infty.$$

Nun folgt aus Gleichung Ib.)

$$-\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^{n+2}-r^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}-1}} = \psi(c,\alpha) + \frac{kn\alpha^{n-1}}{2(\alpha^n-k)^2}\int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{t(t^n-1)dt}{\left(\sqrt{t^2.\frac{t^n\alpha^n-k}{\alpha^n-k}}-1\right)^3} > \psi(c,\alpha).$$

Daher folgt aus Gleichung IIIa.)

$$\text{III.)} \lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} -\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{r^{n+2}-r^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}-1}} = \infty, \quad \lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} \sqrt{\frac{r^{n+2}-r^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}-1} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} r^2(r^n-k) = \lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} \alpha^2(\alpha^n-k) = 0,$$

also ist entweder $\lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} r = 0$ oder $= \pm \sqrt[n]{k}$.

Da aber stets $r \geqq \alpha \geqq \sqrt[n]{k}$ ist, so folgt $\lim_{\alpha=\sqrt[n]{k}} r = \sqrt[n]{k}$.

Für $\alpha = \alpha_0$ ist $\psi(c,\alpha) + \Lambda = 0$, $\psi(r,\alpha) = -\psi(c,\alpha) = \Lambda$, daher $r = +\infty$.

Es wird ferner gezeigt werden, dass $dr/d\alpha$ stets positiv ist. Daraus folgt: Wenn α von $\sqrt[n]{k}$ bis α_0 steigt, wächst r von $\sqrt[n]{k}$ bis ∞.

Auf Grund der Gleichung Ia.) ergeben sich für jeden Wert von r zwei entgegengesetzt gleiche Werte von $\varphi - \varphi_1$; die Enveloppe ist daher zur Geraden $\varphi = \varphi_1$ symmetrisch. Auf der oberen Hälfte der Enveloppe ist $\varphi - \varphi_1 > 0$; nehmen wir an, dass die Möglichkeit der Elimination von α aus den Gleichungen Ia.) und Ib.) bewiesen sei, so ist auf der oberen Hälfte

$$\frac{d(\varphi-\varphi_1)}{dr}=\frac{\partial(\varphi-\varphi_1)}{\partial r}=\frac{a}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}},$$

weil $\partial(\varphi-\varphi_1)/\partial a=0$ ist.

Es ist daher $d(\varphi-\varphi_1)/dr$ positiv, $\varphi-\varphi_1$ ist eine ständig steigende Funktion von r. — Auf der unteren Hälfte der Enveloppe ist $d(\varphi-\varphi_1)/dr$ negativ. Daher folgt:

Wenn r von $\sqrt[n]{k}$ bis ∞ steigt, so wächst $|\varphi-\varphi_1|$ ständig von 0 bis N, wobei

$$N=\int_{\alpha_0}^{\infty}\frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}+\int_{\alpha_0}^{c}\frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}.$$

Denn für $a=r=\sqrt[n]{k}$ folgt $a=0$, $\varphi-\varphi_1=0$.

Die Enveloppe ist daher hyperbelähnlich. Sie verläuft ganz in dem Winkelraume $2N$.

Es ist

$$N<2\int_{\alpha_0}^{\infty}\frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}}=2\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2\frac{t^n\alpha_0{}^n-k}{\alpha_0{}^n-k}-1}}.$$

Ich habe $r=\alpha_0.t$, $a^2=\alpha^2{}_0(\alpha_0{}^n-k)$ gesetzt. Nun ist $\frac{t^n\,\alpha_0{}^n-k}{\alpha_0{}^n-k}=t^n+\frac{k(t^n-1)}{\alpha_0{}^n-k}\geqq t^n$, daher

$$N<2\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^{n+2}-1}}.$$

Daher ist für $n=1$ der Winkelraum

$$2N<4\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^3-1}}<2\pi,$$

für $n-2$ ist $2N<\pi$, für wachsende Werte von n wird $\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^{n+2}-1}}$ immer kleiner.

Für $n \geqq 2$ ist daher der Winkelraum, in dem die Enveloppe verläuft, stets konkav. (Figur 17. Gesetzt ist $n = 2$.)

Im Falle $n = 2$ hatten wir einen Hyperbelzweig erhalten. Es ist daher wahrscheinlich, dass für $n \geqq 2$ die Enveloppe gegen O konkav ist. Es ist

$$\text{IV.)}\quad \frac{\partial \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{kn\alpha^{n-2}}{2\sqrt{\alpha^n - k}} \int_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1)}\right)^3} + \frac{n[\alpha^n(t^{n+2}-1)(2\alpha^n-k)+k(t^2-1)(\alpha^n-2k)]}{2(\alpha^n-k)\left(\sqrt{\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1)}\right)^5} \right\} t(t^n-1)\,dt,$$

$$\text{Va.)}\quad \frac{\partial \psi(r,\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{2a^2(\alpha^n-k)+nr^2[(r^n-k)\alpha^n-k(r^n-\alpha^n)]}{2a\left(\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}\right)^3}$$

$$-\frac{kn\alpha^{n-2}}{2\sqrt{\alpha^n-k}} \int_1^{\frac{r}{\alpha}} \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1)}\right)^3} + \frac{n[\alpha^n(t^{n+2}-1)(2\alpha^n-k)+k(t^2-1)(\alpha^n-2k)]}{2(\alpha^n-k)\left(\sqrt{\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1)}\right)^5} \right\} t(t^n-1)\,dt.$$

Setze ich $r = c$, so erhalte ich als Gleichung Vb.) den entsprechenden Wert für $\partial\psi(c,\alpha)/\partial\alpha$.

Das Differenzieren nach dem Parameter α ist auf Grund von § 13 bei $\Lambda(\alpha)$ und $\psi(r,\alpha)$, $\psi(c,\alpha)$ gestattet.

Es ist, wie wir oben sahen, $r = \alpha$ nur für $\psi(r,\alpha) = -\infty$, $\alpha = \sqrt[n]{k}$. Daher ist für $\alpha > \sqrt[n]{k}$ stets $r \gtrless \alpha$, und zwar $r > \alpha$.

Es ist n, α stets positiv, $\alpha^n - k \geqq 0$, $t \geqq 1$. Ferner ist $r^n - k \geqq a^2/r^2 \geqq 0$, $k > 0$. Somit ist der erste Teil der rechten Seite von Gleichung Va.) negativ.

Es ist ferner, damit $\sqrt{\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1)}$ reell ist, $\alpha^n(t^{n+2}-1)-k(t^2-1) \geqq 0$, folglich auch $\alpha^{2n}(t^{n+2}-1)-k^2(t^2-1) \geqq 0$, da $\alpha^n \geqq k$; mithin ist $\alpha^n(t^{n+2}-1)(2\alpha^n-k) + k(t^2-1)(\alpha^n-2k) = (\alpha^n-k)[\alpha^n(t^{n+2}-1)+k(t^2-1)]+\alpha^{2n}(t^{n+2}-1)-k^2(t^2-1) \geqq 0$.

Daher sind $\partial\Lambda(\alpha)/\partial\alpha$, $\partial\psi(r,\alpha)/\partial\alpha$ stets negativ, was oben (pag. 63) behauptet wurde. Es kann ferner $\partial\psi/\partial\alpha$ nur verschwinden, wenn beide Teile der rechten Seite von Gleichung Va.) verschwinden, wenn also auch das Integral verschwindet. Das kann aber nur eintreten für $r = \alpha$; daher folgt:

Für $\sqrt[n]{k} < \alpha$ ist $\partial\psi(r,\alpha)/\partial\alpha$ stets von 0 verschieden. Das Gleiche gilt von $\partial\psi(c,\alpha)/\partial\alpha$ für $\sqrt[n]{k} < \alpha < \alpha_0$.

Setze ich $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = f(r,\alpha)$, so folgt:

Für $\sqrt[n]{k} < \alpha < \alpha_0$ ist $\partial f/\partial\alpha$ von 0 verschieden und negativ, ferner $f(r,\alpha)$ eine reguläre Funktion von r und α.

Mithin ist im Intervalle $\sqrt[n]{k} < \alpha < \alpha_0$, $\sqrt[n]{k} < r < \infty$ α eine reguläre Funktion von r auf Grund der Gleichung Ib.)

Es ist

$$\text{VI.}\quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial\psi(r,\alpha)}{\partial r} = \frac{r(r^n-k)[(n+2)\alpha^n-2k]}{2\sqrt{\alpha^n-k}\,(\sqrt{r^{n+2}-r^2k}-a^2)^3}$$

stets grösser als 0 für $\alpha > \sqrt[n]{k}$, $r > \alpha$. Daher ist die Grösse $dr/d\alpha = -\partial f/\partial\alpha : \partial f/\partial r$ stets positiv und von 0 verschieden für $\alpha_0 > \alpha > \sqrt[n]{k}$, wie oben (pag. 64) behauptet wurde.

Die Stelle $r = \sqrt[n]{k}$ ist ausgeschlossen, ebenso $r = \infty$. Abgesehen von der Stelle $r = \sqrt[n]{k}$ ist stets $\alpha < r$. Nun ist für $\sqrt[n]{k} < \alpha < \alpha_0$, $\alpha < r < \infty$ die Grösse

$$\varphi - \varphi_1 = \int_\alpha^r \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k}-a^2} + \int_\alpha^c \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{n+2}-r^2k}-a^2}$$

eine analytische reguläre Funktion von α und r, mithin auf Grund des Vorhergehenden, wenn ich den Wert für α einsetze, $\varphi - \varphi_1$ eine reguläre Funktion von r. Daher kann die Enveloppe im Endlichen keinen Rückkehrpunkt besitzen (§ 18) ausser für $r = \alpha = \sqrt[n]{k}$. In diesem Punkte ist aber $\varphi = \varphi_1$,

$$\frac{dr}{d\varphi}\Big|_{r=\sqrt[n]{k}} = a\sqrt{r^{n+2}-r^2k}-a^2\Big|_{r=\sqrt[n]{k}} = \lim_{r=\sqrt[n]{k}} r\sqrt{\frac{r^{n+2}-r^2k}{\alpha^{n+2}-\alpha^2k}}-1 = 0$$

auf Grund von Gleichung III.)

Nun ist aber, wenn ich den Winkel zwischen Radiusvektor und Kurventangente mit (r,τ) bezeichne,

$$tg(r,\tau)\Big|_{r=\sqrt[n]{k}} = r/\frac{dr}{d\varphi}\Big|_{r=\sqrt[n]{k}} = \infty,$$

d. h. die Enveloppe schneidet die Gerade $\varphi = \varphi_1$ im Punkte $r = \sqrt[n]{k}$ rechtwinklig und berührt dort die Grenzkurve.

Auf jeder Seite der Geraden entspricht einem Werte von r immer nur ein Wert von φ, die Grösse φ ist daher in jeder Nähe der Geraden eine reguläre Funktion von r. Daher kann die Enveloppe in der Nähe der Geraden $\varphi = \varphi_1$ nur die Gestalt des Buckels einer Hyperbel haben und keinen Rückkehrpunkt besitzen.

Ich fasse die bisherigen Ergebnisse zusammen.

Die Enveloppe besitzt überhaupt keine singulären Punkte; sie ist symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_1$ und berührt in ihrem Perizentrum, das auf dieser Geraden liegt, die Grenzkurve; sie hat ungefähr die Gestalt einer Hyperbel und verläuft ganz in dem Winkelraume $2N$, der für $n = 1$ kleiner ist als 2π, für $n \geqq 2$ kleiner ist als π.

Der Fall $n = -1$ ist in § 3 erledigt.

B.) $n = -2$ (§ 1).

Die Gleichung der Bahnkurve lautet:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^\alpha \frac{a\,dr}{r\sqrt{1-kr^2-a^2}} = \pm \int_r^\alpha \frac{dr\sqrt{1-k\alpha^2}}{r\sqrt{k}\sqrt{\alpha^2-r^2}},$$

da $a^2 = 1 - k\alpha^2$.

Dies ist (§ 1) eine zur Geraden $\varphi = \varphi_0$ symmetrische Doppelspirale, die vom Punkte $r = \alpha$ aus nach beiden Seiten hin sich dem Punkte O ständig nähert und ihn unendlich oft umkreist.

Um die Gleichung der Enveloppe aller Extremalen zu erhalten, die durch den Punkt $P(c,\varphi_1)$ gehen, muss ich α eliminieren aus den Gleichungen

Ia.) $$\varphi - \varphi_1 = \pm \left\{ \int_r^\alpha \frac{dr\sqrt{1-k\alpha^2}}{r\sqrt{k(\alpha^2-r^2)}} + \int_c^\alpha \frac{dr\sqrt{1-k\alpha^2}}{r\sqrt{k(\alpha^2-r^2)}} \right\}$$ und

Ib.) $$\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0.$$

Dabei ist

$$\psi(r,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_\alpha^r \frac{dr\sqrt{1-k\alpha^2}}{r\sqrt{k(\alpha^2-r^2)}} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_1^\alpha \frac{dt\sqrt{1-k\alpha^2}}{t\alpha\sqrt{k}\sqrt{1-t^2}},$$

IIa.) $$\psi(r,\alpha) = -\frac{\sqrt{1-k\alpha^2}}{\alpha\sqrt{k}\sqrt{\alpha^2-r^2}} + \int_{\frac{r}{\alpha}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2\sqrt{k(1-k\alpha^2)}}.$$

IIb.) $$\psi(c,\alpha) = -\frac{\sqrt{1-k\alpha^2}}{\alpha\sqrt{k}\sqrt{\alpha^2-c^2}} + \int_{\frac{c}{\alpha}}^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2\sqrt{k(1-k\alpha^2)}}.$$

Der Abstand des Apozentrums der Spirale vom Pole O ist $\alpha = m/\sqrt{k(m^2+1)}$ (§ 1). Daser ist stets $r \leqq \alpha$, $c \leqq \alpha$.

Wenn r von 0 bis α steigt, dann fällt $\psi(r,\alpha)$ als Funktion von r von $+\infty$ bis $-\infty$. Denn für $r = 0$ ist

$$\int_{\frac{r}{\alpha}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \infty,$$

für $r = \alpha$ ist $-1/\sqrt{\alpha^2-r^2} = -\infty$; es ist ferner

$$\frac{\partial\psi(r,\alpha)}{\partial r} = \frac{-k\alpha(1-kr^2)}{ar\left(\sqrt{1-kr^2-a^2}\right)^3} < 0.$$

Daher besitzt die Gleichung Ib.) für jeden Wert von α genau eine Wurzel $r \leqq \alpha$. Alle Spiralen liegen ganz innerhalb der Grenzkurve $1-kr^2 = 0$, daher bewegt sich α in dem Intervalle

$$c \leqq \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ich erhalte durch eine Grenzbetrachtung, die der auf pag. 63, 64 ganz ähnlich ist, $\lim_{\alpha=1/\sqrt{k}} r = 1/\sqrt{k}$,

$$\text{III.)} \lim_{\alpha=\frac{1}{\sqrt{k}}} \sqrt{\frac{1-kr^2}{1-k\alpha^2}} - 1 = 0.$$

Für $\alpha = c$ ist $-1/\sqrt{\alpha^2-c^2}$ und damit $\psi(c,\alpha) = -\infty$, folglich $\psi(r,\alpha) = -\psi(c,\alpha) = +\infty$, $r = 0$. Es wird ferner gezeigt werden, dass $dr/d\alpha$ stets positiv ist, somit folgt:

Wenn α von $1/\sqrt{k}$ bis c fällt, so fällt r von $1/\sqrt{k}$ bis 0.

Da jedem Werte r nach Gleichung Ia.) zwei Werte von $\varphi-\varphi_1$ entsprechen, so folgt: Die Enveloppe ist symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_1$.

Es ist ferner für $r = \alpha = 1/\sqrt{k}$ die Grösse $\varphi-\varphi_1 = 0$.

Für $\alpha = c$, $r = 0$ ist

$$\varphi-\varphi_1 = \pm\int_0^c \frac{dr\,\sqrt{1-kc^2}}{r\sqrt{k(c^2-r^2)}} = \pm\infty.$$

Setze ich ferner die Existenz der Funktion $\alpha = \alpha(r)$ als bewiesen voraus, so folgt:

$$\text{da } \frac{\partial(\varphi-\varphi_1)}{\partial\alpha} = 0, \text{ so ist } \frac{d(\varphi-\varphi_1)}{dr} = \frac{\partial(\varphi-\varphi_1)}{\partial r}.$$

Auf der oberen Hälfte der Enveloppe, auf welcher $\varphi-\varphi_1 > 0$ ist, ist daher $d(\varphi-\varphi_1)/dr = -\sqrt{1-k\alpha^2}/r\sqrt{k(\alpha^2-r^2)}$ negativ, $\varphi-\varphi_1$ ist dort eine fallende Funktion von r; wenn r von $1/\sqrt{k}$ bis 0 fällt, so wächst $\varphi-\varphi_1$ von 0 bis ∞. Auf der unteren Hälfte, auf welcher $\varphi-\varphi_1 < 0$ ist, ergibt sich entsprechend, dass für $1/\sqrt{k} \geq r \geq 0$ die Grösse $\varphi-\varphi_1$ von 0 bis $-\infty$ fällt.

Die Enveloppe ist daher selbst eine zur Geraden $\varphi=\varphi_1$ symmetrische Doppelspirale, die sich von ihrem Apozentrum aus nach beiden Seiten dem Punkte O beständig nähert und ihn unendlich oft umkreist.

Ich führe jetzt statt ψ eine neue Funktion χ der Bequemlichkeit halber ein.

Ich setze $\chi(r,\alpha) = \alpha^2\sqrt{k(1-k\alpha^2)}\,\psi(r,\alpha)$ und erhalte so:

$$\text{IVa.)}\quad \chi(r,\alpha) = -\frac{\alpha(1-k\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2-r^2}} + \int_{\alpha}^{\frac{1}{r}} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\text{IVb.)}\quad \chi(c,\alpha) = -\frac{\alpha(1-k\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} + \int_{\alpha}^{\frac{1}{c}} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

Es ist

$$\text{IVa.)}\quad \frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{2k\alpha^2(\alpha^2-r^2)+\alpha^2(1-kr^2)}{(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}.$$

$$\text{IVb.)}\quad \frac{\partial\chi(c,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{2k\alpha^2(\alpha^2-c^2)+\alpha^2(1-kc^2)}{(\sqrt{\alpha^2-c^2})^3}.$$

$$\text{VI.)}\quad \frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial r} = -\frac{\alpha^3(1-kr^2)}{r(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}.$$

Durch die Substitution $\chi = \alpha^2\sqrt{k(1-k\alpha^2)}\cdot\psi$ ist die Gleichung Ib.) übergegangen in die neue Gleichung

$$\chi(r,\alpha) + \chi(c,\alpha) = 0.$$

Da für $\alpha < 1/\sqrt{k}$ stets $r < \alpha$ ist, so folgt:

Für $c < \alpha < 1/\sqrt{k}$ ist $1 - kr^2 > 0$, $\partial\chi(r,\alpha)/\partial\alpha$ und $\partial\chi(c,\alpha)/\partial\alpha$ sind positiv und von 0 verschieden, ebenso $-\partial\chi(r,\alpha)/\partial\alpha$. Daher ist auch, wie vorhin behauptet,

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\chi(c,\alpha)}{\partial\alpha}}{-\frac{\partial\chi}{\partial r}} > 0.$$

Ferner folgt ganz ähnlich wie für $n > 0$ (pag. 67): Nach Ausschluss der beiden Punkte $r = 0$, $r = 1/\sqrt{k}$ ist im Intervall $0 < r < 1/\sqrt{k}$ die Grösse α eine reguläre analytische Funktion von r, ist ebenso auch $\varphi - \varphi_1$ eine reguläre Funktion von r.

Im Punkte $r = 1/\sqrt{k}$ ist auf Grund von Gleichung III.)

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\frac{1-kr^2}{1-k\alpha^2}-1}\Bigg|^{r=\frac{1}{\sqrt{k}}} = 0,$$

daher folgt wie oben, dass die Enveloppe dort die Grenzkurve berührt und keinen singulären Punkt besitzt. Dagegen ist der Punkt $r = 0$ in der Tat singulär, er ist ein „asymptotischer Punkt."

Der sogenannte „Enveloppensatz" der Variationsrechnung verliert für den Punkt O seine Gültigkeit.

Es ist nämlich wegen $d\varphi/dr = a/\sqrt{1-kr^2-a^2}\cdot r$ das Aktionsintegral

$$\int_{r=0} \sqrt{U+h}ds = \int_{r=0} \frac{dr}{r}\cdot\frac{1-kr^2}{\sqrt{1-kr^2-a^2}} = \infty.$$

Die Enveloppe besitzt also ausser dem Punkte O keinen singulären Punkt. In ihrem Apozentrum, dem Punkte $r = 1/\sqrt{k}$, $\varphi = \varphi_1$, berührt sie die Grenzkurve.

C.) $n < -2$, § 11B und § 15B.

Setze ich $n + 2 = -m$, dann ist $m \geqq 1$, die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int_r^\alpha \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^{-m}-kr^2-a^2}}.$$

Die Gleichung der Enveloppe der durch den Punkt $P(c,\varphi_1)$ gehenden Extremalen erhält man durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen

Ia.) $$\varphi - \varphi_1 = \pm\left\{\int_r^\alpha \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^{-m}-kr^2}{\alpha^{-m}-k\alpha^2}-1}} \cdots \int_c^\alpha \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^{-m}-kr^2}{\alpha^{-m}-k\alpha^2}-1}}\right\},$$

Ib.) $\psi(r,\alpha) + \psi(c,\alpha) = 0$ (pag. 45).

Statt $\psi(r,\alpha)$ führe ich eine neue Funktion ein,

$$\chi(r,\alpha) = \alpha\cdot\psi(r,\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{r^{-m}-kr^2}{\alpha^{-m}-k\alpha^2}-1}} +$$

$$\frac{(m+2)\,k\alpha^{m+2}}{2(1-k\alpha^{m+2})^2}\int_{\frac{r}{\alpha}}^1 \frac{dt(t^{-m-1}-t)}{\left(\sqrt{\frac{t^{-m}-kt^2\alpha^{m+2}}{1-k\alpha^{m+2}}}-1\right)^3}.$$

Dadurch geht Gleichung Ib.) über in

Ic.) $\chi(r,\alpha) + \chi(c,\alpha) = 0.$

Aus den Eigenschaften der Funktion $\psi(r,\alpha)$ (pag. 46) folgt: Wenn r von α bis 0 fällt, wächst $\chi(r,\alpha)$ von $-\infty$ bis zu der positiven Zahl $M = \alpha.\Lambda$.

Die Gleichung Ic.) besitzt also eine positive Wurzel r nur, solange $\chi(c,\alpha) + M(\alpha) \geqq 0$ ist. Da $a^2 = \alpha^{-m} - k\alpha^2 \geqq 0$ ist, so ist stets $\alpha \leqq \alpha_1$, wobei ich α_1 gesetzt habe $= 1/\sqrt[m+2]{k}$. Es ist nun $\chi(c,\alpha) = -\infty$ für $\alpha = c$, $= +\infty$ für $\alpha = \alpha_1$, es ist ferner, wie später gezeigt werden wird, sowohl χ wie M eine monoton wachsende Funktion von α, daher besitzt die Funktion $\chi(c,\alpha) + M(\alpha)$ als Funktion von α genau eine positive Nullstelle α_0, die zwischen c und α_1 liegt, und ist positiv für $\alpha_0 < \alpha \leqq \alpha_1$.

Daher besitzt die Gleichung Ic.) eine positive Wurzel r für jeden Wert α des Intervalles $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$.

Ebenso wie pag. 63, 64 ergibt sich hier

$$\text{II.)}\ \lim_{\alpha=\alpha_1} r = \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt[m+2]{k}}, \quad \text{III.)}\ \lim_{\alpha=\alpha_1} \sqrt{\frac{r^{-m} - kr^2}{\alpha^{-m} - k\alpha^2}} - 1 = 0.$$

Es ist ferner für $\alpha = \alpha_0$ die Grösse $\chi(r,\alpha) = M$, also $r = 0$. Es wird ferner gezeigt werden, dass $dr/d\alpha$ positiv ist, also folgt:

Wenn α von α_0 bis α_1 steigt, wächst r von 0 bis α_1.

Aus Gleichung Ia.) folgt: Für $r = \alpha = \alpha_1$ ist $\varphi - \varphi_1 = 0$, für $r = 0$, $\alpha = \alpha_0$ ist

$$\varphi - \varphi_1 = \pm N = \pm \left\{ \int_0^{\alpha_0} \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^{-m} - kr^2}{\alpha_0^{-m} - k\alpha_0^2} - 1}} + \int_c^{\alpha_0} \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^{-m} - kr^2}{\alpha_0^{-m} - k\alpha_0^2} - 1}} \right\}.$$

Aus der Gleichung Ia.) folgt, dass die Enveloppe zur Geraden $\varphi = \varphi_1$ symmetrisch ist, dass ferner auf ihrer oberen Hälfte, auf der $\varphi - \varphi_1 > 0$,

$$\frac{d(\varphi - \varphi_1)}{dr} = \frac{\partial(\varphi - \varphi_1)}{\partial r} = -\frac{a}{r\sqrt{r^{-m} - kr^2 - a^2}} < 0 \text{ ist.}$$

Wenn daher r von α_1 bis 0 fällt, steigt $\varphi - \varphi_1$ auf der oberen Hälfte der Enveloppe von 0 bis N, auf der unteren Hälfte fällt $\varphi - \varphi_1$ von 0 bis $-N$.

Es folgt ferner leicht, dass die Enveloppe die beiden Geraden $\varphi = \varphi_1 \pm N$ in O berührt und dass der Winkelraum $2N$, in dem sie verläuft, für $m \geqq 1$ kleiner ist als 4π, für $m \geqq 2$ kleiner als 2π, für $m \geqq 4$ kleiner als π.

Es ist

$$\text{IV.)}\quad \frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{(r^{-m}-kr^2)(m\alpha^{-m-1}+2k\alpha)+(m+2)k\alpha(r^{-m}-r^2\alpha^{-m-2})}{2\left(\sqrt{r^{-m}-kr^2}-\sqrt{\alpha^{-m}-k\alpha^2}\right)^3\sqrt{\alpha^{-m}-k\alpha^2}}$$

$$+\frac{k(m+2)^2\alpha^{m+1}}{4\left(\sqrt{1-k\alpha^{m+2}}\right)^3}\times$$

$$\int_{\frac{r}{\alpha}}^{1}\frac{dt(t^{-m-1}-t)[(t^{-m}-1)(2-k\alpha^{m+2})+k\alpha^{m+2}(1-t^2)(2k\alpha^{m+2}-1)]}{\left(\sqrt{t^{-m}-1+k\alpha^{m+2}(1-t^2)}\right)^5}.$$

Das Differenzieren nach dem Parameter α ist nach § 13 gestattet. Es ist ferner $\partial M/\partial\alpha = \partial\chi(0,\alpha)/\partial\alpha$. Im Intervalle $\alpha_1 > \alpha > \alpha_0$ ist nun stets $\partial\chi(r,\alpha)/\partial\alpha$ und ebenso natürlich $\partial\chi(c,\alpha)/\partial\alpha$ grösser als 0. Das ergibt sich folgendermassen.

Für $\alpha_1 > \alpha > \alpha_0$ ist $r \leqq \alpha$, $r^{-m}-kr^2 \geqq a^2 > 0$, mithin $(r^{-m}-kr^2)(m\alpha^{-m-1}+2k\alpha)+(m+2)k\alpha(r^{-m}-r^2\alpha^{-m-2})$ und somit der erste Bestandteil von $\partial\chi(r,\alpha)/\partial\alpha$ grösser als 0. Der zweite Bestandteil ist für $\alpha_1 > \alpha > \alpha_0$ nicht negativ. Die Integrationsvariable t ist $\leqq 1$, also folgt unschwer, dass für $0 \leqq t \leqq 1$ stets $(t^{-m}-1)/(1-t^2) \geqq m/2$, $(t^{-m}-1)(2-k\alpha^{m+2}) + k\alpha^{m+2}(1-t^2)(2k\alpha^{m+2}-1) \geqq (1-t^2)[(2-x)m/2 + x(2x-1)]$. Dabei habe ich $k\alpha^{m+2} = x$ gesetzt. Da $\alpha^{-m}-k\alpha^2 = a^2 > 0$, so ist $1-k\alpha^{m+2} > 0$, $0 < x < 1$. Die Funktion $(2-x)m/2 + x(2x-1)$ ist aber für $0 < x < 1$ positiv.

Da $\partial\chi(r,\alpha)/\partial\alpha$ für $\alpha_1 > \alpha > \alpha_0$ grösser als 0 ist, so folgt ähnlich wie pag. 67, dass für $0 < r < \alpha_1$ der Parameter α eine reguläre analytische Funktion von r ist.

Daher folgt aus Gleichung Ia.), dass $\varphi - \varphi_1$ längs der Enveloppe eine reguläre Funktion von r ist, mit Ausnahme der beiden Punkte $r = 0$ und $r = \alpha_1$. Der Punkt $r = 0$ ist

singulär, da die Enveloppe dort eine Ecke besitzt mit dem Winkel $2N$. Der Enveloppensatz verliert für diesen Punkt seine Gültigkeit, da das bis $r = 0$ erstreckte Aktionsintegral unendlich wird. Im Punkte $r = \alpha_1$, $\varphi = \varphi_1$ ist zufolge Gleichung III.) die Grösse $dr/d\varphi = 0$, daher schneidet die Enveloppe dort die Gerade $\varphi = \varphi_1$ rechtwinklig und berührt die Grenzkurve, besitzt also dort keinen singulären Punkt.

Es ist ferner, wie oben behauptet wurde, $\chi(r,\alpha)$ und daher auch $M(\alpha) = \chi(0,\alpha)$ eine monoton steigende Funktion von α, ferner ist auch

$$\frac{dr}{d\alpha} = \left[\frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\chi(c,\alpha)}{\partial\alpha}\right] : \left[-\frac{\partial\chi(r,\alpha)}{\partial r}\right]$$

positiv, da $\partial\psi(r,\alpha)/\partial r$ (pag. 45.) und daher $\partial\chi(r,\alpha)/\partial r$ negativ ist. Ich fasse noch einmal die Ergebnisse zusammen:

Die Enveloppe ist symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_1$ und berührt auf ihr die Grenzkurve. Wenn r von 0 bis α_1 wächst, nimmt $|\varphi - \varphi_1|$ von N bis 0 ab, daher nähert sie sich von ihrem Apozentrum $r = \alpha_1$ aus ständig dem Punkte O, in welchem sie eine Ecke bildet. Ihre Gestalt ist daher annähernd die der Kurven von § 9 C 2 II (Figur 11), nur dass stets der Winkelraum $2N < 4\pi$ ist.

§ 20. $U = -r^n$, $n < 0$, $h > 0$.

Die Gleichung einer Bahnkurve lautet:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\alpha}^{r} \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 h - r^{n+2} - a^2}}.$$

Die Untersuchung der Enveloppe der Bahnkurven, welche durch den festen Punkt $P(c,\varphi_1)$ gehen, gestaltet sich genau wie im Falle $U = +r^n$, $h < 0$, $n > 0$. Man erhält auch hier eine hyperbelähnliche zur Geraden $\varphi = \varphi_1$ symmetrische Kurve, welche auf dieser Geraden die Grenzkurve berührt. Der einzige wesentliche Unterschied ergibt sich bei der Funktion $\partial\psi(r,\alpha)/\partial\alpha$. Der Nachweis nämlich, dass diese Funktion für $\sqrt[n]{h} < r < \infty$ negativ bleibt und

nicht verschwindet, ist mir nicht für alle Werte von $n < 0$ gelungen. Es ist hier

$$\frac{\partial\psi(r,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{-f(r,\alpha)}{2a\left(\sqrt{r^2(h-r^n)-a^2}\right)^3} - \frac{h\alpha^{n+1}}{4a^3}\int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{tn(t^n-1)g(t,\alpha)dt}{\left(\sqrt{h(t^2-1)+\alpha^n(1-t^{n+2})}\right)^5}.$$

Dabei ist gesetzt

$$f(r,\alpha) = 2a^2(h-\alpha^n) - nr^2[\alpha^n(h-r^n) + h(\alpha^n - r^n)],$$
$$g(t,\alpha) = h(t^2-1)[(n-2)\alpha^n - 2h(n-1)] + \alpha^n(1-t^{n+2}) \times [h(n+2) - 2\alpha^n(n+1)].$$

Es ist hier für $\sqrt[n]{h} < \alpha$ die Grösse $h-\alpha^n = a^2/\alpha^2 > 0$, ferner ist $h-r^n \geqq 0$; n ist < 0, $\alpha^n - r^n \geqq 0$. Daher ist für $\sqrt[n]{h} < \alpha$ stets $f(r,\alpha) > 0$.

Die Integrationsvariable t ist $\geqq 1$, also $n(t^n-1) \geqq 0$, daher ist bewiesen, dass $\partial\psi(r,\alpha)/\partial\alpha$ negativ ist und nicht verschwindet, sobald gezeigt wird, dass $g(t,\alpha) \geqq 0$ ist.

Für $n = -1$ ist $g(t,\alpha) = h(t-1)[t(4h-3\alpha^n) + 4(h-\alpha^n)]$. und dieser Ausdruck wird nicht negativ, da $t \geqq 1$, $h \geqq \alpha^n$ ist. — Für $n = -2$ ist $g(t,\alpha) = h(t^2-1)(6h-4\alpha^n) \geqq 0$. Für $n < -2$ ist, wenn ich $n+2 = -m$ setze, $m > 0$ und $g(t,\alpha) = h(t^2-1)[(m+3)2h - (m+4)\alpha^n] + \alpha^n(1-t^{-m})[2\alpha^n(m+1) - mh]$.

Da $\alpha^n \leqq h$, $2(m+3) > m+4$, $2h(m+3) > \alpha^n(m+4)$, $1-t^{-m} \geqq 0$, so wird $g(t,\alpha)$ nicht negativ werden zugleich mit dem Ausdrucke

$$F(m,\alpha,t) = \frac{t^2-1}{1-t^{-m}} + \frac{2\alpha^{2n}(m+1) - mh\alpha^n}{h[2h(m+3) - \alpha^n(m+4)]}.$$

Für $1 \leqq t < \infty$ ist $(t^2-1)/(1-t^{-m}) \geqq 2/m$; setze ich $\alpha^n/h = x$, so ist $0 \leqq x \leqq 1$,

$$F > \frac{2}{m} + \frac{2x^2(m+1) - mx}{2(m+3) - x(m+4)} - \frac{4(m+3) - x(m^2+2m+8) + 2x^2m(m+1)}{m[2(m+3) - x(m+4)]}.$$

$g(t,\alpha)$ wird daher nicht negativ werden, solange

$$f(x) = 4(m+3) - x(m^2+2m+8) + 2x^2m(m+1) \geqq 0$$

ist. Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle

$$x = (m^2+2m+8)/4m(m+1)$$

ein Minimum, dessen Betrag gleich

$$\frac{-m^4+28m^3+108m^2+64m-64}{8m(m+1)} \text{ ist.}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist positiv für

$$m^4 < 28m^3+108m^2+64m-64,\ m \leqq 31.$$

Somit ist das Nichtverschwinden der Funktion $\partial\psi(r,\alpha)/\partial\alpha$ und die Richtigkeit aller daran anknüpfenden Folgerungen sichergestellt nur für $m \leqq 31$, $n \geqq -33$.

Berichtigungen.

Seite 8, Zeile 4 von unten aus, lies $\varphi = \varphi_0$ für $\varphi - \varphi_0$.
„ 22, „ 16, streiche das Wort „positive“.
„ 33, „ 1 und 11 v. u., und
„ 34, „ 6 v. u., lies $\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^\alpha$.
„ 37, „ 8 v. u., lies t^n für t_n.
„ 39, „ 6 und 8, lies $g_\alpha(x,\alpha)$ für $g\alpha(x,\alpha)$.
„ 41, „ 10, lies $\partial/\partial a$ für $\partial/\partial\alpha$,
„ 12, lies $\left(\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}\right)^3$ für $\left(\sqrt{r^{n+2}-r^2k-a^2}\right)$.
„ 44, „ 4 v. u., lies $r^{n+2}-r^2k$ für $r^{n+2}-r^2$.
„ 45, „ 3, lies $\psi(c,\alpha)$ für $\psi(c,a)$.
„ 49, „ 1, 5, 6 v. u., lies „des Teiles“ für „der Teile.“
„ 52, „ 1, lies $\psi(r,\alpha)$ für $\psi(r,c)$.

Lebenslauf.

Am 1. Februar 1888 wurde ich, Hermann Kober, jüdischer Religion, in Beuthen O/S geboren als Sohn des Kaufmanns Emanuel Kober und seiner Frau Cäcilie geb. Wischnitz. In Breslau besuchte ich das Elisabethgymnasium von Ostern 1897 an und verliess es Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Reife. Seitdem widme ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Breslauer Universität; das Sommersemester 1909 studierte ich in Göttingen.

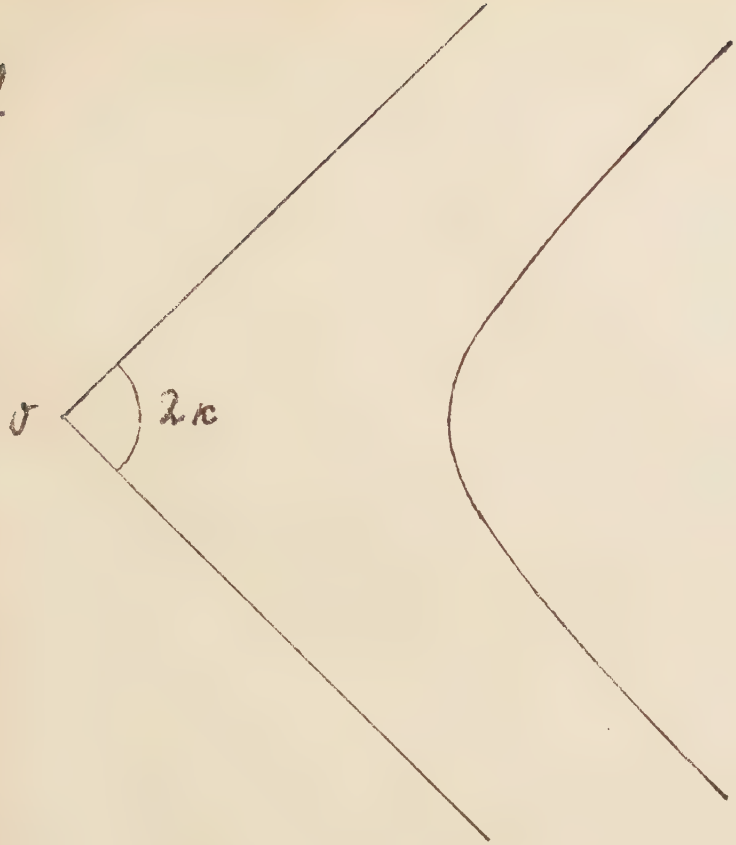
Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren und Dozenten:

Franz, Hintze, Hönigswald, Kneser, Kühnemann, Ladenburg, Landsberg, Lummer, Pringsheim, Rosanes, Stern, Sturm, v. Wenckstern in Breslau,

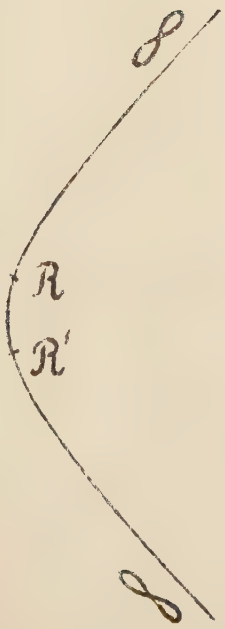
Hilbert, Landau, Nelson, Runge in Göttingen.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sage ich Dank für die Anleitung, die sie meinen Studien zuteil werden liessen, besonders aber Herrn Geheimrat Kneser für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das freundliche Interesse, das er ihr entgegenbrachte.

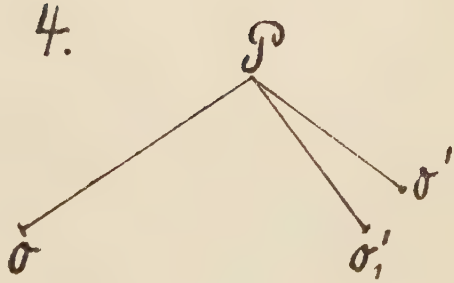
1.



3.

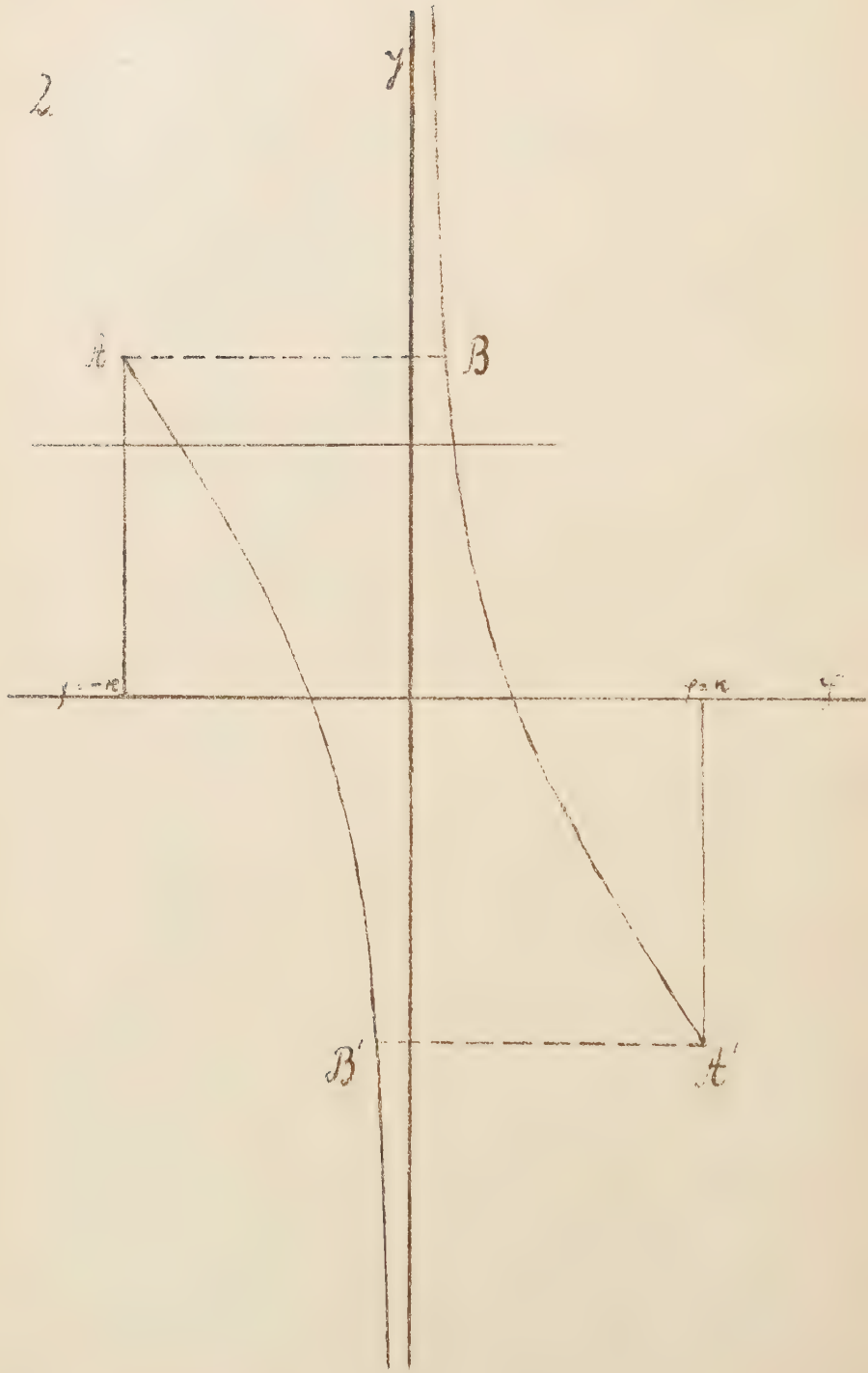


4.

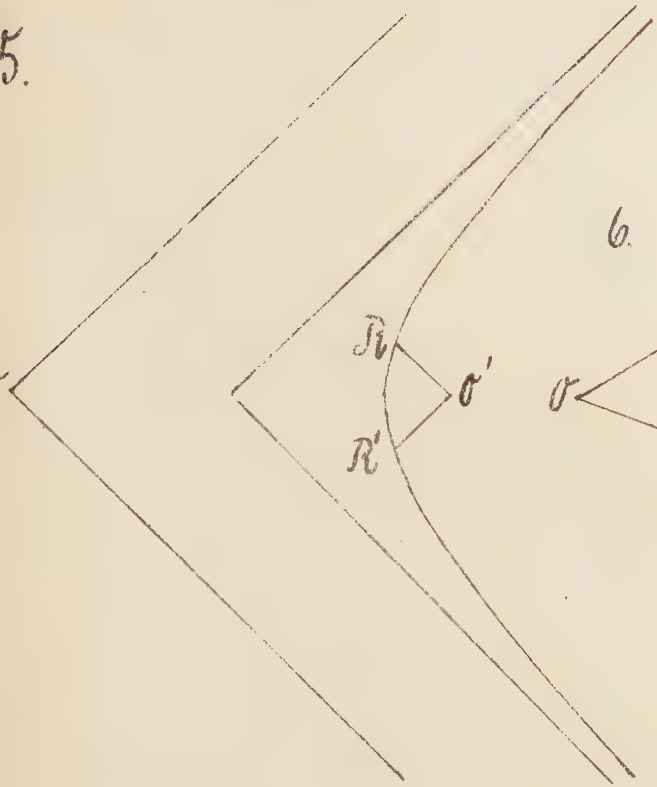


2

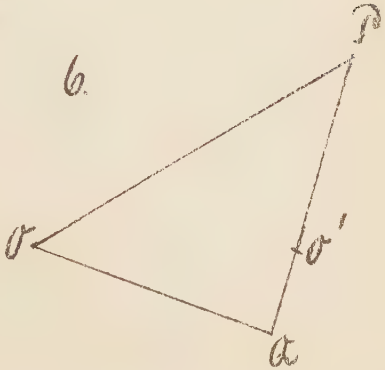
2.



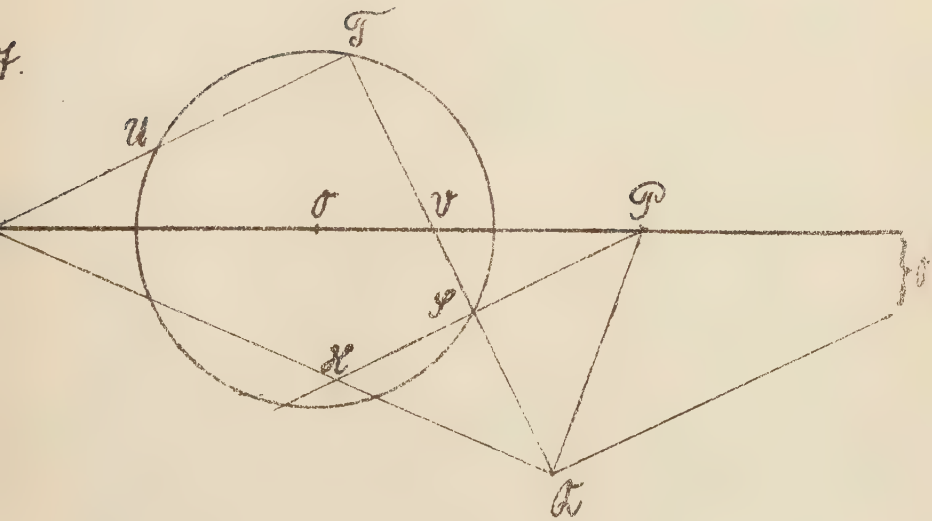
5.



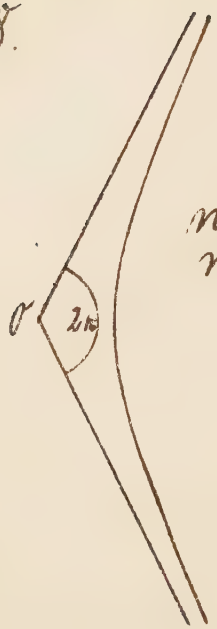
6.

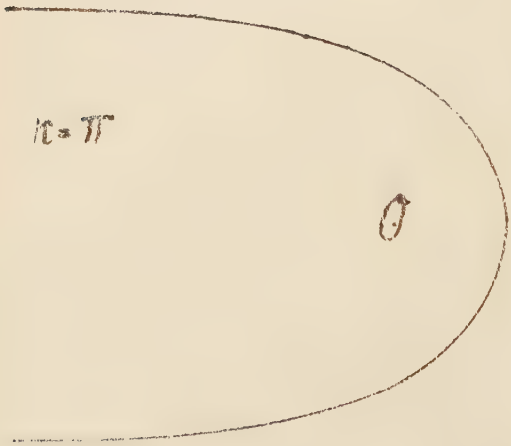


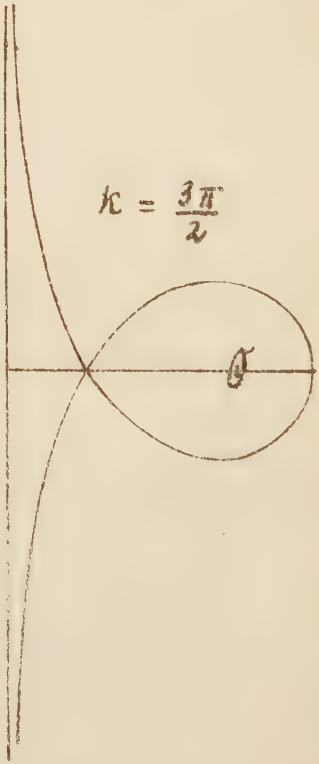
7.



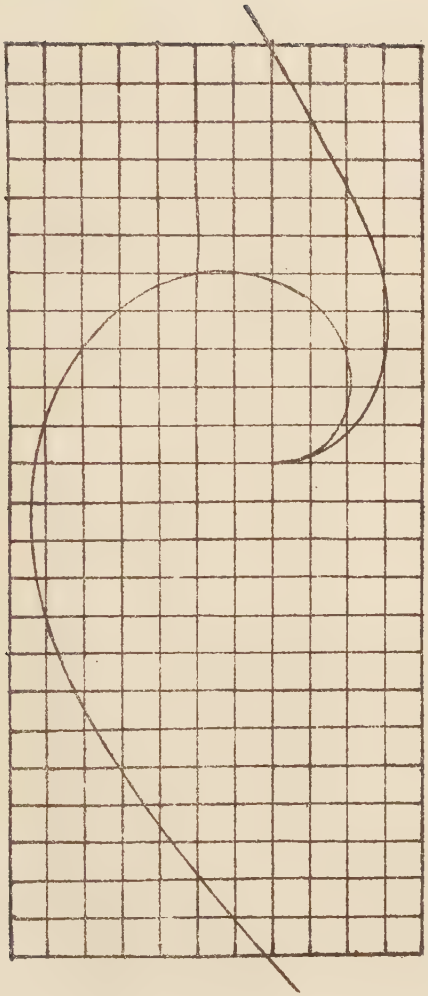
8.



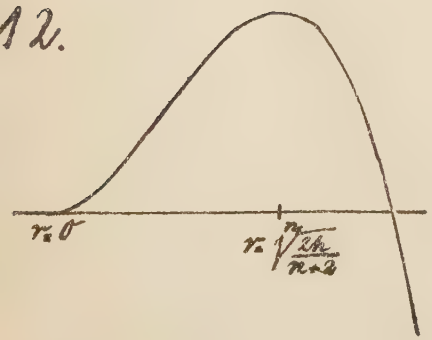




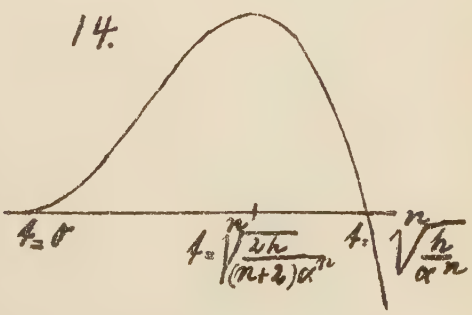
10.



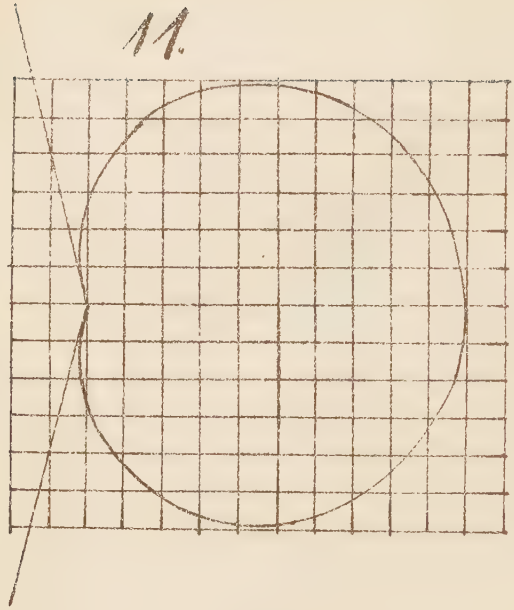
12.


r = 0
r = $\sqrt[n]{\frac{2h}{n+2}}$

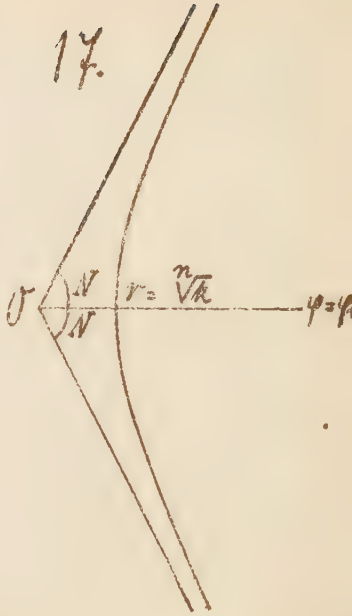
14.


r = 0
r = $\sqrt[n]{\frac{2h}{(n+2)\alpha^n}}$
r = $\sqrt[n]{\frac{h}{\alpha^n}}$

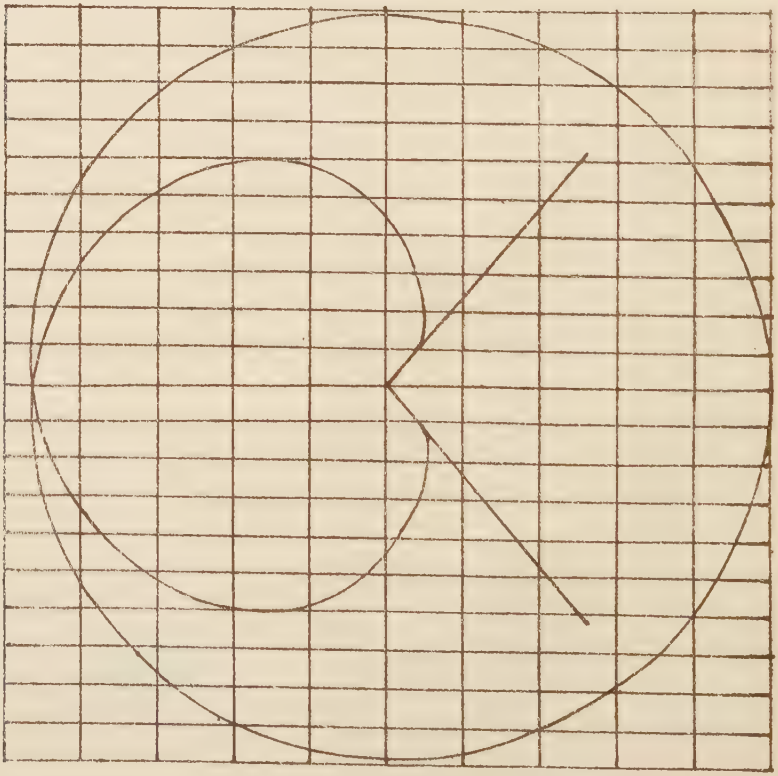
11.



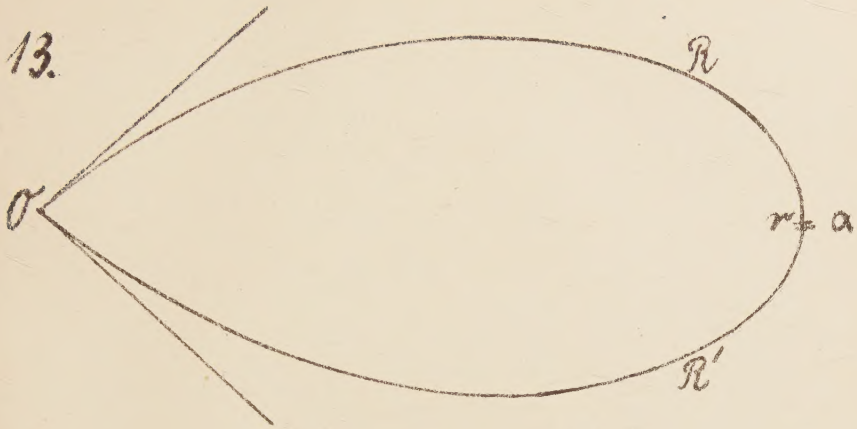
17.



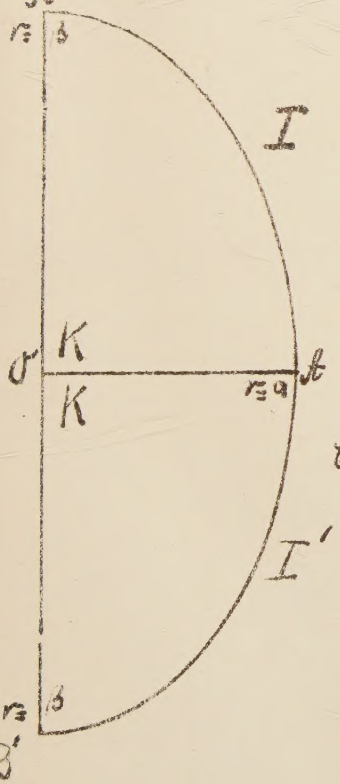
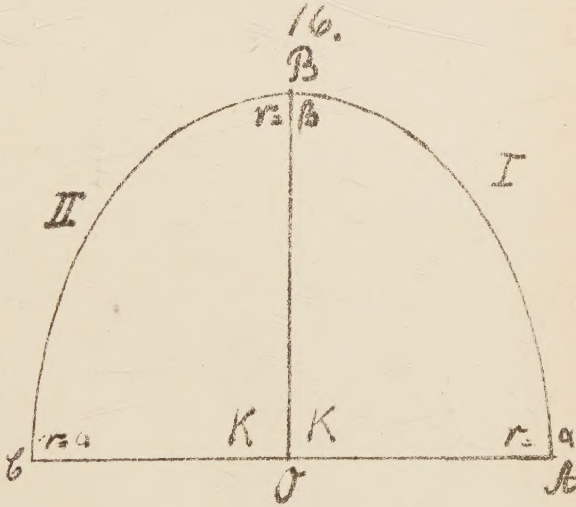
11.



13.



15.



16.